# Lista 3 de Macroeconomia I - Parte 2

Fábio Nishida - PPGE/FEA-RP/USP

Julho, 2021

## Conteúdo

**9 Infinite-Horizon Problems** **2**
- 9.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações . . . 2
- 9.3 The Neoclassical Theory of Optimal Growth . . . 3
  - 9.3.1 [☒] . . . 3
  - 9.3.3 [☒] . . . 6
  - 9.3.4 [☒] . . . 8
- 9.4 Exogenous and Endogenous Technological Progress . . . 9
  - 9.4.2 [☒] . . . 9
  - 9.4.3 [☒] . . . 10
  - 9.4.5 [☒] . . . 11
  - 9.4.6 [☒] . . . 12

**10 Optimal Control with Constraints** **14**
- 10.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações . . . 14
- 10.1 Constraints Involving Control Variables . . . 17
  - 10.1.2 [☒] . . . 17
  - 10.1.3 [☒] . . . 18
  - 10.1.4 [☒] . . . 20
  - 10.1.5 [☒] . . . 22

# 9 Infinite-Horizon Problems

## 9.0 [⊠] Definições, Proposições, Lemas e Observações

---

**Condições de Transversalidade para Horizonte Infinito (Chiang, 1999)**. Para o problema com horizonte infinito, temos:

$$\underbrace{\int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda}\right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] dt}_{\Omega_1} + \underbrace{\lim_{t\to\infty} H.\Delta T}_{\Omega_2} - \underbrace{\lim_{t\to\infty} \lambda(t).\Delta y_T}_{\Omega_3} = 0 \tag{9.6}$$

Para satisfazer essa condição, os 3 componentes $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ precisam zera individualmente. Note que das $\Omega_2$ e $\Omega_3$ surgem as condições de transversalidade.

TVC do problema de linha terminal horizontal:

$$\lim_{t\to\infty} H = 0 \tag{9.3}$$

TVC do problema de linha terminal vertical:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 \tag{9.4}$$

TVC do problema de linha terminal vertical truncada:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to\infty} \lambda(t).[y(t) - y_{min}] = 0 \tag{9.5}$$

---

## 9.3 The Neoclassical Theory of Optimal Growth

### 9.3.1 [☒]

**Let the production function and the utility function be**

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$
$$U = \hat{U} - \frac{1}{b}c^{-b} \qquad (b > 0)$$

---

**(a) Find the $y = \phi(k)$ function and the $U'(c)$ function. Check whether these conform to the specifications in (9.22) and (9.25).**

---

Especificações:

- A função de produção pode ser expressa como

$$y = \phi(k) \qquad \text{com } \phi' > 0 \quad \text{e} \quad \phi''(k) < 0, \quad \forall k > 0 \tag{9.22}$$

- A função índice de utilidade social tem as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{ccc} U'(c) > 0 & U''(c) < 0, & \forall c > 0 \\ \lim\limits_{c\to 0} U'(c) = \infty & \text{e} & \lim\limits_{c\to\infty} U'(c) = 0 \end{array} \tag{9.25}$$

---

Note que a função de produção $Y$ está multiplicado pela constante $A$. Como $K^{\alpha}, L^{1-\alpha} > 0$, então $A > 0$ também, pois a produção assume valores positivos. Agora, dividindo ambos lados da função de produção por $L$, temos

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \frac{AK^{\alpha}}{L^{\alpha}}.\frac{L^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}} \iff y = Ak^{\alpha} \qquad (y \equiv \tfrac{Y}{L},\ k \equiv \tfrac{K}{L})$$

Logo, definindo $\phi(k) \equiv y = Ak^{\alpha}$ e derivando, temos:

$$\phi'(k) = \frac{\partial\phi(k)}{\partial k} = \alpha Ak^{\alpha-1} > 0$$
$$\phi''(k) = \frac{\partial^2\phi(k)}{\partial k^2} = \alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-1} < 0$$

pois $\alpha > 0, (\alpha - 1) < 0, A > 1$ e $k^{\alpha-1} > 0$. Logo, especificações de (9.22) são atendidas. Agora, assumindo a função utilidade na forma

$$U = \hat{U} - \frac{1}{b}c^{-b}, \qquad (b > 0)$$

e as suas derivadas em relação a $c$ são

$$\frac{\partial U(c)}{\partial c} = -\frac{1}{b}\left(-bc^{-b-1}\right) = c^{-b-1} = \frac{1}{c^{b+1}} > 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial^2 U(c)}{\partial c^2} = (-b-1)c^{-b-1-1} = -\frac{b+1}{c^{b+2}} < 0 \tag{2}$$

Para todo $c > 0$, temos os seguintes limites para $U'(c)$:

$$\lim_{c\to 0} U'(c) = \lim_{c\to 0} \frac{1}{c^{b+1}} = \infty$$
$$\lim_{c\to \infty} U'(c) = \lim_{c\to \infty} \frac{1}{c^{b+1}} = 0$$

Portanto, as especificações em (9.25) são atendidas. ■

---

**(b) Write the specific optimal control problem.**

---

O investimento líquido é dado pela equação (9.24):

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \tag{9.24}$$

Substituindo $\phi(k)$ na equação acima, temos

$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k$$

Logo, o problema de controle ótimo é dado por

$$\max_{c} \int_0^{\infty} \left(\hat{U} - \frac{1}{b}.c^{-b}\right) e^{-rt}dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{k} = Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k \\ k(0) = k_0 \\ 0 \leq c(t) \leq Ak^{\alpha} \end{cases}$$

■

---

**(c) Apply the maximum principle, using the current-value Hamiltonian.**

---

A Hamiltoniana é dada por

$$H = \left(\hat{U} - \frac{1}{b}c^{-b}\right) e^{-rt} + \lambda \left[Ak(t)^{\alpha} - c - (n+\delta)k\right].$$

Já para obtermos a Hamiltoniana a valores corrente, $H_c$, multiplicaremos $H$ por $e^{rt}$ e definiremos $H_c \equiv He^{rt}$ e $m \equiv \lambda e^{rt}$. Disto, segue:

$$H_c = \left(\hat{U} - \frac{1}{b}c^{-b}\right) + m\left[Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k\right]$$

As derivadas parciais em relação a $c$ são:

$$\frac{\partial H_c}{\partial c} = c^{-b-1} - m = 0 \iff m = c^{-b-1} = U'(c) > 0 \tag{3}$$
$$\frac{\partial^2 H_c}{\partial c^2} = -(b+1)c^{-b-2} \implies \text{ponto de máximo}$$

■

---

**(d) Derive the differential-equation system in the variables $k$ and $c$. Solve for the steady-state values $(\bar{k}, \bar{c})$.**

---

A equação de movimento de $k$, $\dot{k}$, é dada por:

$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k$$

Para obter $\dot{c}$, usaremos a equação de movimento de $m$, $\dot{m}$, que, por definição, é dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= -\frac{\partial H_c}{\partial k} + rm \\
&= -m\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta)\right] + rm \\
&= -m\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right] \qquad (4)
\end{aligned}$$

Por (3), sabemos que $m = U'(c)$ e, derivando em $t$, temos que $\dot{m} = U''(c)\dot{c}$. Substituindo valores de $m$ e $\dot{m}$, em (4), segue que

$$\begin{aligned}
U''(c)\dot{c} &= -U'(c)\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right] \\
\dot{c} &= -\frac{U'(c)}{U''(c)}\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right] \\
&= -\frac{c^{-b-1}}{(-b-1)c^{-b-2}}\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right] \qquad \text{(por 1 e 2)} \\
&= -\frac{c^{-b-1}}{-(b+1)c^{-b-1}c^{-1}}\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right] \\
&= \frac{c}{b+1}\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right]
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k \\
\dot{c} &= \frac{c}{b+1}\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right]
\end{aligned}$$

No estado estacionário ocorre quando $\dot{k} = 0$ e $\dot{c} = 0$, logo,

$$\begin{aligned}
c &= Ak^{\alpha} - (n+\delta)k \qquad \text{(para } \dot{k} = 0) \\
0 &= \frac{c}{b+1}\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (n+\delta+r)\right]\left(\frac{b+1}{c}\right) \qquad \text{(pois } b, c > 0) \\
\alpha A k^{\alpha-1} &= n+\delta+r \\
k^{\alpha-1} &= \frac{n+\delta+r}{\alpha A} \\
\bar{k} &= \left(\frac{n+\delta+r}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad \text{(para } \dot{c} = 0)
\end{aligned}$$

Usando $\bar{k}$, a curva de $\dot{k} = 0$, obtemos $\bar{c}$:

$$\begin{aligned}
\bar{c} &= A\left[\left(\frac{n+\delta+r}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right]^{\alpha} - (n+\delta)\left[\left(\frac{n+\delta+r}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right] \\
&= A\left(\frac{n+\delta+r}{\alpha A}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n+\delta)\left(\frac{n+\delta+r}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

■

### 9.3.3 [⊠]

**In Fig. 9.4, suppose that the economy is currently located on the lower stable branch and is moving toward point $E$. Let there be a parameter change such that the $\dot{c} = 0$ curve is shifted to the right, but the $\dot{k} = 0$ curve is unaffected.**

---

**(a) What specific parameter changes could cause such a shift?**

---

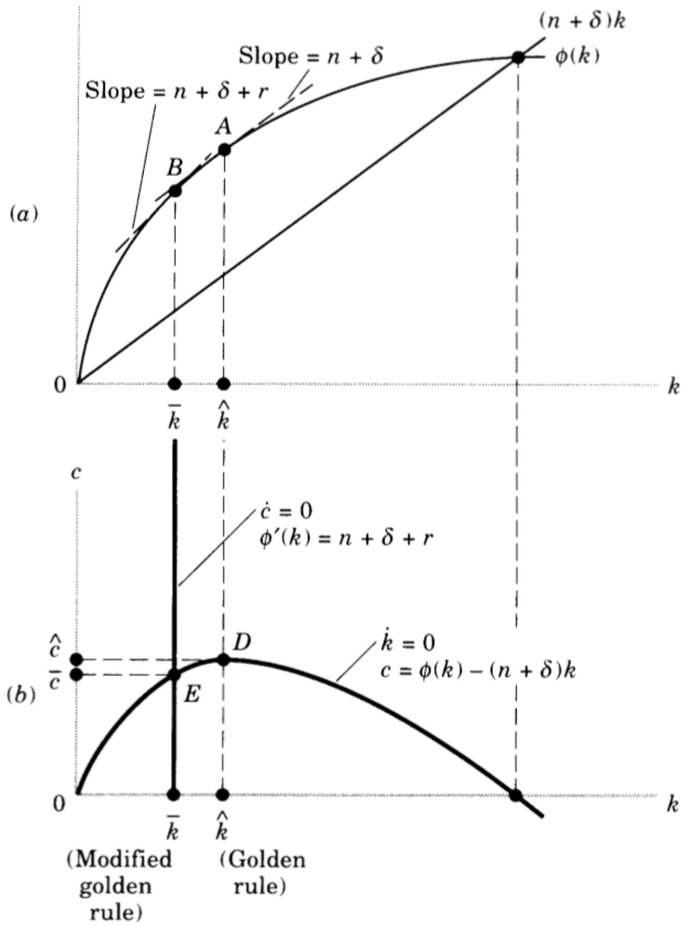


**FIGURE 9.3**

O sistema de equações diferenciais na Figura 9.4 é dado por:

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \tag{9.36}$$
$$\dot{c} = \frac{U'(c)}{U''(c)}\left[\phi'(k) - (n+\delta+r)\right]$$

Para deslocar horizontalmente a curva/reta vertical $\dot{c} = 0$ e não deslocar a curva $\dot{k} = 0$, precisamos alterar a variável $\rho$, pois só está presente na equação da curva $\dot{c}$ (pois $r \equiv \rho - n$). Em particular, para que a curva $\dot{c} = 0$ se desloque para a direita, precisamos diminuir $\rho$, pois assim diminuímos a inclinação em $\phi(k)$ e aproximamos o valor do capital na regra de ouro modificada, $\bar{k}$, com da regra de ouro (que não considera desconto temporal, logo, $r = 0$). ■

---

**(b) What would happen to the position of the steady state?**

---

Uma diminuição na taxa de desconto, $r$, desloca a curva/reta $\dot{c} = 0$ para a direita, o que eleva ambos valores de estado estacionário $\bar{k}$ e $\bar{c}$. ■

**(c) Can we consider the preshift position of the economy – call it $(k_1, c_1)$ – as the appropriate initial point on the new stable branch in the postshift phase diagram? Why?**

---

Chiang (1999, pág. 261) afirma que, ao não estar no ramo estável, as forças dinâmicas do modelo direcionará a uma de 2 situações:

(1) $k$ sempre crescente com $c$ sempre decrescente (indo a sudeste): severo e progressivo aperto no consumo, levando à fome.

(2) $c$ sempre crescente com $k$ sempre decrescente (indo a noroeste): exaustão de capital.

Como a posição da economia $(k_1, c_1)$ estava no ramo estável inferior em direção ao estado estacionário único $E_1$, e houve um deslocamento da curva $\dot{c} = 0$ para a direita, ocorreu uma mudança do estado estacionário para $E_2$ e dos ramos estáveis.

Como o deslocamento foi para a direita, a posição da economia em $(k_1, c_1)$ que estava em direção a $E_1$, agora está à esquerda do novo ramo estável inferior em direção a $E_2$. Caso nada seja feito, a economia em $(k_1, c_1)$ estará em direção à exaustão do capital (situação 2). Portanto, dado que $c$ é a variável de controle, é necessário escolher um $c_2 < c_1$, tal que a economia se posicione em $(k_1, c_2)$ e esteja em um novo ramo estável em direção a $E_2$.

■

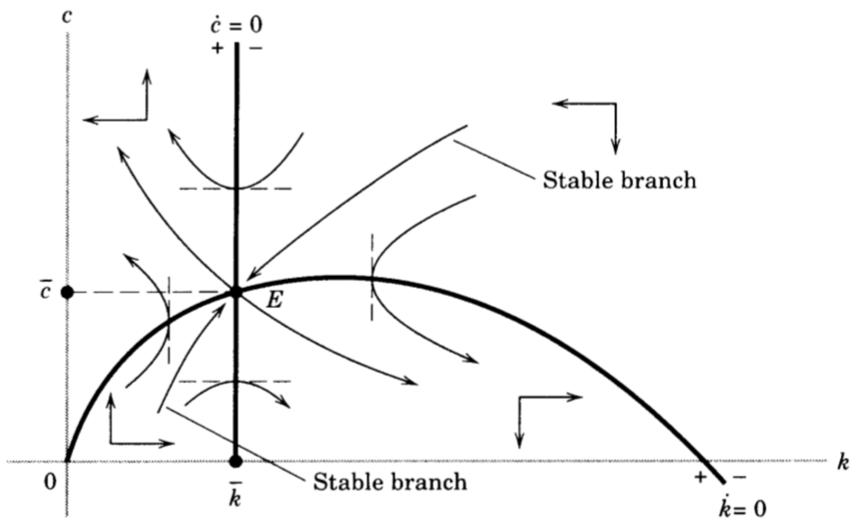


**FIGURE 9.4**

### 9.3.4 [⊠]

**Check whether the Cass model (9.27) satisfies the Mangasarian sufficient conditions.**

---

O problema dado pelo modelo de Cass é dado por:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty U(c)e^{-rt}dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \\ k(0) = k_0, \\ 0 \leq c \leq \phi[k(t)] \end{cases} \tag{9.27}$$

Usando a condição (1) do Teorema de Mangasarian, verificaremos se $F$ e $f$ são diferenciáveis e côncavas em $(k, c)$ conjuntamente. Note que $F = U(c)e^{-rt}$ não depende de $k$, logo verificaremos apenas para $c$:

$$F = U(c)e^{-rt} \overset{\partial/\partial c}{\Longrightarrow} F_c = U'(c)e^{-rt} \overset{\partial/\partial c}{\Longrightarrow} F_{cc} = U''(c)e^{-rt}$$

Como, por suposição (9.25), $U''(c) < 0$ e $e^{-rt} > 0$, então $F_{cc} < 0$ e, portanto, $F$ é diferenciável e côncava em $(k, c)$. Observe também que $f = \phi(k) - c - (n+\delta)k$ é linear em $c$, logo é côncava em $c$. Verificaremos, agora, para $k$

$$f = \phi(k) - c - (n+\delta)k \overset{\partial/\partial k}{\Longrightarrow} f_k = \phi'(k) - (n+\delta) \overset{\partial/\partial k}{\Longrightarrow} f_{kk} = \phi''(k) < 0 \qquad \text{(por 9.22)}$$

Portanto, $f$ é diferenciável e côncava em $(k, c)$. Assim, a condição (1) do **??** é satisfeita.

Como $f$ não é linear em ambos $(k, c)$, precisamos verificar a não-negatividade de $\lambda$. A Hamiltoniana é dada por:

$$H = U(c)e^{-rt} + \lambda\left[\phi(k) - c - (n+\delta)k\right]$$

Por CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-rt} - \lambda = 0 \iff \lambda = U'(c)e^{-rt} > 0 \qquad \text{(por 9.25)}$$

Logo, a condição (2) do Teorema de Mangasarian também é satisfeita, e o modelo de Cass satisfaz as condições de Mangasarian. ■

## 9.4 Exogenous and Endogenous Technological Progress

### 9.4.2 [☒]

**Derive the equation of motion (9.52) by following the same procedure used to derive (9.24).**

---

Suponha função de produção dinâmica com progresso tecnológico do tipo Harrod-neutral:

$$Y = Y[K, A(t)L] \tag{9.48}$$

Defina eficiência de trabalho como

$$\eta \equiv AL \tag{9.50}$$

Substituindo (9.50) em (9.48), temos

$$Y = Y(K, \eta) \tag{9.51}$$

Para derivar (9.24), os termos foram dividos por $L$ para chegarmos nas variáveis per capita/por trabalhador. Neste problema, a variável relevante, é $\eta \equiv AL$. Portanto, as variáveis "por eficência de trabalho" são

$$k_\eta = \frac{K}{AL} \qquad \text{e} \qquad y_\eta \equiv \frac{Y}{AL} = \phi(k_\eta) \tag{9.51'}$$

A equação de movimento de $K$ é dada por:

$$\dot{K} = Y - C - \delta K \tag{1}$$

Para obtermos a equação de movimento de $k_\eta$, $\dot{k}_\eta$, dividiremos os dois lados de (1) por $\eta$:

$$\frac{\dot{K}}{\eta} = \frac{Y}{\eta} - \frac{C}{\eta} - \delta\frac{K}{\eta} \iff \frac{\dot{K}}{\eta} = y_\eta - c_\eta - \delta k_\eta \tag{2}$$

em que $c_\eta \equiv C/\eta$. Por definição, temos

$$\begin{aligned}
\dot{K} = \frac{dK}{dt} &= \frac{d\,(k_\eta LA)}{dt} && (k_\eta = \tfrac{K}{LA}) \\
&= \frac{dk_\eta}{dt}.LA + k_\eta A\frac{dL}{dt} + k_\eta L\frac{dA}{dt} && \text{(regra do produto)} \\
&= \dot{k}_\eta.LA + k_\eta A\dot{L} + k_\eta L\dot{A} && (3)
\end{aligned}$$

Aplicando (3) em (2) e usando $\phi(k_\eta) = y_\eta$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{k}_\eta.LA + k_\eta A\dot{L} + k_\eta L\dot{A}}{\eta} &= \phi(k_\eta) - c_\eta - \delta k_\eta \\
\frac{\dot{k}_\eta.LA + k_\eta A\dot{L} + k_\eta L\dot{A}}{LA} &= \phi(k_\eta) - c_\eta - \delta k_\eta && (\eta \equiv LA) \\
\dot{k}_\eta + \frac{k_\eta\dot{L}}{L} + \frac{k_\eta\dot{A}}{A} &= \phi(k_\eta) - c_\eta - \delta k_\eta \\
\dot{k}_\eta + k_\eta n + k_\eta a &= \phi(k_\eta) - c_\eta - \delta k_\eta && (n \equiv \dot{L}/L \text{ e } a \equiv \dot{A}/A) \\
\dot{k}_\eta &= \phi(k_\eta) - c_\eta - \delta k_\eta - k_\eta n - k_\eta a \\
\dot{k}_\eta &= \phi(k_\eta) - c_\eta - (a + n + \delta)k_\eta && (9.52)
\end{aligned}$$

■

### 9.4.3 [☒]

**Verify the validity of the maximum-principle conditions in (9.55), (9.56), and (9.57).**

---

A Hamiltoniana do problema é dada por:

$$H'_c = U(c_\eta) + m'[\phi(k_\eta) - c_\eta - (a + n + \delta)k_\eta]$$

Agora, verificando as validades das condições do princípio máximo:

$$\frac{\partial H'_c}{\partial c_\eta} = U'(c_\eta) - m' \iff U'(c_\eta) = m' \tag{9.55}$$

$$\dot{k}_\eta = \frac{\partial H'_c}{\partial m'} = \phi(k_\eta) - c_\eta - (a + n + \delta)k_\eta \tag{9.56}$$

$$\begin{aligned} \dot{m}' =& -\frac{\partial H'_c}{\partial k_\eta} + rm' = -m'[\phi'(k_\eta) - (a + n + \delta)] + rm' \\ & - m'[\phi'(k_\eta) - (a + n + \delta + r)] \end{aligned} \tag{9.57}$$

■

### 9.4.5 [☒]

**What would happen if (9.67) were changed to $A = \delta S_A \psi(A)$, where $\psi$ is a concave function?**

---

Em (9.67), temos que o avanço tecnológico, $\dot{A}$, pode ocorrer pelo emprego de capital humano em tecnologia/pesquisa, $S_A$, a uma chance de sucesso, $\sigma$, com base na tecnologia existente, $A$:

$$\dot{A} = \sigma S_A A \implies \frac{\dot{A}}{A} = \sigma S_A \tag{9.67}$$

Note que $\dot{A}/A = \sigma S_A > 0$ enquanto $\sigma, S_A > 0$, logo a tecnologia pode crescer sem limite. Além disso, o produto marginal do capital humano cresce proporcionalmente a $A$:

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial S_A} = \sigma A$$

Ao substituir $A = \delta S_A \psi(A)$ em (9.67), em que $\psi(A)$ é uma função côncava, a produção marginal do capital humano no vetor de pesquisa não continuaria a crescer proporcionalmente a $A$, pois:

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial S_A} = \delta \psi(A)$$

Assim, haveria um maior incentivo do capital humano empregado na pesquisa, $S_A$, a ser empregado na manufatura, $S_Y$, pois quando $A$ aumenta, o que faria com que a taxa de crescimento da tecnologia, $\dot{A}$, diminui. ■

### 9.4.6 [☒]

**In the Romer model, how is the steady-state growth rate specifically affected by the following parameters?**

---

- Taxa de crescimento no estado estacionário do modelo de Romer:

$$g \equiv \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\sigma(\alpha+\beta)S_0 - \alpha\rho}{\alpha\theta+\beta} \tag{9.79}$$

$$= \frac{\sigma S_0\alpha + \sigma S_0\beta - \alpha\rho}{\alpha\theta+\beta}$$

$$= \frac{\sigma S_0\beta + (\sigma S_0 - \rho)\alpha}{\alpha\theta+\beta} \tag{9.79'}$$

- Variáveis:
  - $\alpha \in [0,1]$: fração do output aplicado à pesquisa
  - $\beta \geq 0$: depreciação da tecnologia
  - $\theta \in (0,1)$
  - $\rho$: desconto temporal
- Regra do quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

---

### (a) parâmetro $\alpha$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{(\sigma S_0-\rho)(\alpha\theta+\beta) - [\sigma S_0\beta + (\sigma S_0-\rho)\alpha]\theta}{(\alpha\theta+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\sigma S_0-\rho)\alpha\theta + (\sigma S_0-\rho)\beta - \sigma S_0\beta\theta - (\sigma S_0-\rho)\alpha\theta}{(\alpha\theta+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\sigma S_0-\rho)\beta - \sigma S_0\beta\theta}{(\alpha\theta+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\sigma S_0-\rho-\sigma S_0\theta)\beta}{(\alpha\theta+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\sigma S_0(1-\theta)-\rho)\,\beta}{(\alpha\theta+\beta)^2}$$

- Se $\sigma S_0(1-\theta) > \rho$, então $\frac{\partial g}{\partial \alpha} > 0$
- Se $\sigma S_0(1-\theta) < \rho$, então $\frac{\partial g}{\partial \alpha} < 0$ ■

---

### (b) parâmetro $\beta$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \beta} &= \frac{\sigma S_0(\alpha\theta+\beta) - [\sigma S_0\beta + (\sigma S_0 - \rho)\alpha]}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= \frac{\sigma S_0\alpha\theta + \sigma S_0\beta - \sigma S_0\beta - \sigma S_0\alpha + \rho\alpha}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= \frac{\sigma S_0\alpha\theta - \sigma S_0\alpha + \rho\alpha}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha\left[\sigma S_0\theta - \sigma S_0 + \rho\right]}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha\left[\sigma S_0(\theta-1) + \rho\right]}{(\alpha\theta+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

Note que $\sigma S_0(\theta-1) = -\sigma S_0(1-\theta)$, então podemos reescrever:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \beta} &= \frac{\alpha\left[-\sigma S_0(1-\theta) + \rho\right]}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= -\frac{\alpha\left[\sigma S_0(1-\theta) - \rho\right]}{(\alpha\theta+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

- Se $\sigma S_0(1-\theta) > \rho$, então $\frac{\partial g}{\partial \beta} < 0$
- Se $\sigma S_0(1-\theta) < \rho$, então $\frac{\partial g}{\partial \beta} > 0$
- Note que o sinal de $\frac{\partial g}{\partial \beta}$ é o oposto de $\frac{\partial g}{\partial \alpha}$, dado que dependem de $\sigma S_0(\theta-1) \gtrless \rho$ ∎

---

**(c) parâmetro $\theta$**

---

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{0.(\alpha\theta+\beta) - [\sigma S_0\beta + (\sigma S_0 - \rho)\alpha]\alpha}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= \frac{-[\sigma S_0\beta + (\sigma S_0 - \rho)\alpha]\alpha}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= \frac{-[\sigma S_0\beta + \sigma S_0\alpha - \rho\alpha]\alpha}{(\alpha\theta+\beta)^2} \\
&= \frac{-[\sigma S_0(\beta+\alpha) - \rho\alpha]\alpha}{(\alpha\theta+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

- Se $\sigma S_0(\beta+\alpha) > \rho\alpha$, então $\frac{\partial g}{\partial \theta} < 0$
- Se $\sigma S_0(\beta+\alpha) < \rho\alpha$, então $\frac{\partial g}{\partial \theta} > 0$ ∎

# 10 Optimal Control with Constraints

## 10.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

---

**Restrições de Igualdade (Chiang, 1999)**.

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T F(t,y,u_1,u_2)dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = f(t,y,u_1,u_2) \\ g(t,y,u_1,u_2) = c \\ \text{e condições de contorno} \end{cases} \tag{10.1}$$

$$H = F(t,y,u_1,u_2) + \lambda(t) f(t,y,u_1,u_2), \quad \forall t \in [0,T] \tag{10.2}$$

$$\mathscr{L} = H + \theta(t)[c - g(t,y,u_1,u_2)] \tag{10.3}$$

Condições de princípio máximo:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = \frac{\partial F}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u_j} - \theta \frac{\partial g}{\partial u_j} = 0 \qquad \forall t \in [0,T],\ j = 1,2 \tag{10.4}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = c - g(t,y,u_1,u_2) = 0 \qquad \forall t \in [0,T] \tag{10.5}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} \left( = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) \qquad [\text{eq. movimento de } y] \tag{10.6}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} \left( = -\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \qquad [\text{eq. movimento de } \lambda] \tag{10.6}$$

e condições de transversalidade

*número de variáveis de controle deve exceder o número de restrições.

---

**Restrições de Desigualdade (Chiang, 1999)**.

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T F(t,y,u_1,u_2)dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = f(t,y,u_1,u_2) \\ g^1(t,y,u_1,u_2) \le c_1 \\ g^2(t,y,u_1,u_2) \le c_2 \\ \text{e condições de contorno} \end{cases} \tag{10.8}$$

$$H = F(t,y,u_1,u_2) + \lambda(t) f(t,y,u_1,u_2), \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\mathscr{L} = H + \theta_1(t)[c_1 - g^1(t,y,u_1,u_2)] + \theta_2(t)[c_2 - g^2(t,y,u_1,u_2)] \tag{10.9}$$

$$\mathscr{L} = F + \lambda f + \theta_1[c_1 - g^1] + \theta_2[c_2 - g^2] \tag{10.9'}$$

*número de variáveis de controle <u>não</u> precisa exceder o número de restrições.

Condições de princípio máximo:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = 0 \qquad \forall t \in [0,T],\ j = 1,2 \tag{10.10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_i} = c_i - g^i \geq 0 \qquad \theta_i \geq 0 \qquad \theta_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_i} = 0 \qquad \forall t \in [0,T], \quad i,j = 1,2 \tag{10.11}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} \qquad \text{[eq. movimento de } y\text{]} \tag{10.13}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} \qquad \text{[eq. movimento de } \lambda\text{]} \tag{10.13'}$$

e condições de transversalidade

Se há restrição de não-negatividade,

$$u_j(t) \geq 0,$$

então, por condições de Kuhn-Tucker, trocar condições em (10.10) por

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} \leq 0 \qquad u_j \geq 0 \qquad u_j \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = 0 \tag{10.12}$$

---

**Qualificação de Restrições de Desigualdade (Chiang, 1999)**. De acordo com Arrow, Hurwicz e Uzawa, uma das condições abaixo devem satisfazer a qualificação de restrição:

1. Todas funções de restrição $g^i$ são côncavas nas variáveis de controle $u_j$
2. Todas funções de restrição $g^i$ são lineares nas variáveis de controle $u_j$
3. Todas funções de restrição $g^i$ são convexas nas variáveis de controle $u_j$. Além disso, existe um ponto na região de controle $u_0 \in U$ tal que, quando avaliado em $u_0$, tidas restrições são estritamente menores que $c_i$ (conjunto de restrição tem um interior não-vazio)
4. Todas funções de restrição $g^i$ satisfazem a condição de posto: tomando apenas as restrições que são efetivas ou ativas, formar uma matriz de derivadas parciais $[\partial g^i / \partial u_j]_e$ (em que $e$ indica "apenas restrições efetivas"), e avaliar as derivadas parciais nos valores ótimos das variáveis $y$ e $u$. A condição de posto é que o ponto da matriz deve ser igual ao número de restrições efetivas.

---

**Restrição Integral de Igualdade (Chiang, 1999)**.

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T F(t,y,u)dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = f(t,y,u) \\ \int_0^T G(t,y,u)dt = k & (k \text{ dado}) \\ y(0) = y_0 \quad y(T) \text{ livre} & (y_0, T \text{ dados}) \end{cases} \tag{10.14}$$

Introduziremos nova variável de estado $\Gamma(t)$,

$$\Gamma(t) = -\int_0^t G(t,y,u)dt, \tag{10.15}$$

tal que a derivada é

$$\dot{\Gamma} = -G(t,y,u) \qquad \text{[eq. movimento de } \Gamma\text{]} \tag{10.16}$$

e os valores inicial e terminal de $\Gamma(t)$ são

$$\Gamma(0) = -\int_0^0 G(t,y,u)dt = 0 \tag{10.17}$$

$$\Gamma(T) = -\int_0^T G(t,y,u)dt = -k \qquad \text{[por (10.14)]} \tag{10.18}$$

Incorporando $\Gamma(t)$ no problema, reescrevemos (10.14)

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T F(t,y,u)dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = f(t,y,u) \\ \dot{\Gamma} = -G(t,y,u) \\ y(0) = y_0 \quad y(T) \text{ livre} \quad (y_0, T \text{ dados}) \\ \Gamma(0) = 0 \quad \Gamma(T) = -k \quad (k \text{ dado}) \end{cases} \tag{10.19}$$

$$H = F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u) - \mu G(t,y,u) \tag{10.20}$$

Condições de princípio máximo:

$$\begin{aligned} &\max_u H && \forall t \in [0,T] \\ &\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} && \text{[eq. movimento de } y\text{]} \\ &\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} && \text{[eq. movimento de } \lambda\text{]} \\ &\dot{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial \mu} && \text{[eq. movimento de } \Gamma\text{]} \\ &\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma} && \text{[eq. movimento de } \mu\text{]} \\ &\lambda(T) = 0 && \text{[TVC]} \end{aligned} \tag{10.21}$$

*Podemos omitir $\dot{\mu}$ de (10.21), pois $\Gamma$ não aparece na Hamiltoniana,

$$\dot{\mu} = \frac{\partial H}{\partial \Gamma} = 0 \implies \mu(t) = \text{constante.}$$

---

**Restrição Integral de Desigualdade (Chiang, 1999)**. Dada nova variável de estado $\Gamma(t) = -\int_0^t G(t,y,u)dt$ e $\mu(t) \geq 0$ constante, temos

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T F(t,y,u)dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = f(t,y,u) \\ \dot{\Gamma} = -G(t,y,u) \\ y(0) = y_0 \quad y(T) \text{ livre} \quad (y_0, T \text{ dados}) \\ \Gamma(0) = 0 \quad \Gamma(T) \geq -k \quad (k \text{ dado}) \end{cases} \tag{10.26}$$

Condições de princípio máximo:

$$\max_u H \qquad \forall t \in [0,T] \tag{10.28'}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\lambda(T) = 0$$

$$\mu \geq 0 \text{ constante} \qquad k - \int_0^T G(t,y,u)dt \geq 0 \qquad \mu\left[k - \int_0^T G(t,y,u)dt = 0\right] = 0$$

---

## 10.1 Constraints Involving Control Variables

### 10.1.2 [⊠]

**In Example 2, it is demonstrated that if $\lambda > 0$, then the optimal control is $u^* = 1$. By analogous reasoning, demonstrate that, if $\lambda < 0$, then the optimal control is $u^* = -1$.**

---

Queremos mostrar que se $\lambda < 0$, então $u^* = -1$. Suponha que $\lambda < 0$. Logo, para que

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = \lambda + \theta_1 - \theta_2 = 0, \qquad (\forall t \in [0, T])$$

seja válido, precisamos que $\theta_1 - \theta_2 > 0 \iff \theta_1 > \theta_2$. Como $\theta_1 \geq 0$ e $\theta_2 \geq 0$, então $\theta_1 > 0$.

Logo, pelas condições

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_1} = u + 1 \geq 0 \qquad \theta_1 \geq 0 \qquad \theta_1(u+1) = 0, \tag{10.44}$$

como $\theta_1 > 0$, então precisamos que

$$u + 1 = 0 \iff u^* = -1$$

■

**10.1.3 [⊠]**

**An individual's productive hours per day (24 hours less sleeping and leisure time-normalized to one) can be spent on either *work* or *study*. Work results in immediate earnings; study contributes to human capital $K(t)$ (knowledge) and improves future earnings. Let the proportion of productive hours spent on study be denoted by $s$. The rate of change of human capital, $\dot{K}$, is assumed to have a constant elasticity $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ with respect to $sK$. Current. earnings are determined by the level of human capital multiplied by the time spent on work.**

---

**(a) Formulate the individual's problem of work-study decision for a planning period $[0, T]$ with a discount rate $\rho$ $(0 < \rho < 1)$**

---

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T (1-s)e^{-\rho t}dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{K} = A(sK)^\alpha & (A > 0) \\ K(0) = K_0, \quad K(T) \text{ livre} & (K_0, T \text{ dados}) \\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

em que $(1-s)$ é o tempo dedicado ao trabalho. Note que é um problema de linha terminal vertical, pois temos $K(T)$ livre com $T$ dado. ■

---

**(b) Name the state and control variables.**

---

- $K$: variável de estado (com equação de movimento $\dot{k}$)
- $s$: variável de controle

---

**(c) What boundary conditions are appropriate for the state variable?**

---

Condições apropriadas: $K(0) = K_0$ e $T$ dados, com $K(T)$ livre. Ou seja, um indivíduo saberia a quantidade de conhecimento tem no presente $K_0$ e, considerando um desconto temporal $\rho$, escolhe quanto estuda, $s$, em cada período como forma de maximizar a funcional objetivo até determinado tempo terminal $T$. ■

---

**(d) Is this problem a constrained control problem? Which type of constraints does it have?**

---

Sim. Como o tempo produtivo foi normalizado a 1, o tempo de estudo, $s$, em cada período deve estar entre 0 e 1 (e o tempo restante é destinado ao trabalho). ■

---

**(e) How does this problem resemble the Dorfman model of Sec 8.1? How does it differ from the Dorfman model?**

---

No modelo de Dorfman, o estágio terminal $T$ também é fixo, sendo um problema de maximização de uma funcional objetivo de lucro/receita com linha terminal vertical. Nele, há duas variáveis, sendo uma de estado e outra de controle, em que as condições de contorno têm a mesma forma.

Diferente do problema deste exercício, a variável de controle no modelo de Dorfman é não restrita, o que impossibilita a existência de solução de canto. Além disso, também não considera um fator de desconto temporal. ∎

### 10.1.4 [☒]

**Consider the problem**

$$\text{Maximize} \quad \int_0^T F(t,y,u)dt, \quad \text{subject to} \begin{cases} \dot{y} = f(t,y,u) \\ g(t,y,u) \le c \\ y(0) = y_0, \quad y(T) \text{ free}, \quad (y_0, T \text{ given}) \\ 0 \le u(t) \end{cases}$$

**We can, as we did in (10.12), apply the Kuhn-Tucker conditions to the nonnegativity restriction on $u(t)$ without introducing a specific multiplier. Alternatively, we may treat the nonnegativity restriction as an additional constraint of the $g(t,y,u) \le c$ type. Write out the maximum-principle conditions under both approaches, and compare the results. [Use $\theta'$ to denote the new multiplier for the $0 \le u(t)$ constraint and $\mathscr{L}'$ to denote the corresponding new Lagrangian]**

---

**(a) Sem introduzir um multiplicador específico para restrição em $u(t)$**

---

O Lagrangeano, sem introduzir um multiplicador específico para restrição $u(t) \ge 0$, é

$$\mathscr{L} = F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u) + \theta[c - g(t,y,u)]$$

e as condições do princípio máximo, usando (10.11) a (10.13'), são:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} - \theta \frac{\partial g}{\partial u} \le 0, \quad u \ge 0, \quad u\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = 0 \tag{A1}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = c - g(t,y,u) \ge 0, \quad \theta \ge 0, \quad \theta\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0 \tag{A2}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = f(t,y,u) \tag{A3}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \theta\frac{\partial g}{\partial y} \tag{A4}$$

e condições de contorno

■

---

**(b) Introduzindo um multiplicador específico para restrição em $u(t)$**

---

O Lagrangeano do problema, incluindo o multiplicador da restrição $u(t) \ge 0$, $\theta'$, é dado por

$$\mathscr{L}' = F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u) + \theta[c - g(t,y,u)] + \theta' u(t)$$

e as condições do princípio máximo são:

$$\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} - \theta \frac{\partial g}{\partial u} + \theta' = 0 \tag{B1}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \theta} = c - g(t,y,u) \ge 0, \quad \theta \ge 0, \quad \theta\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \theta} = 0 \tag{B2}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \theta'} = u \ge 0, \quad \theta' \ge 0, \quad \theta'\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \theta'} = 0 \tag{B3}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \lambda} = f(t,y,u) \tag{B4}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \theta\frac{\partial g}{\partial y} \tag{B5}$$

e condições de contorno

$\blacksquare$

---

**(c) Comparando as abordagens**

---

Note que os problemas em (a) e (b) são equivalentes, pois:

Se $u > 0$:

No problema do item (a), sem inclusão do multiplicador para restrição em $u(t)$, precisamos, pelas condições de Kuhn-Tucker em (A1), que

$$u\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = 0$$

como $u(t) > 0$, então é necessário que

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = 0$$

No problema do item (b), incluindo multiplicador para restrição em $u(t)$, precisamos, pelas condições de Kuhn-Tucker em (B3), que

$$\theta'\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \theta'} = 0$$

como $u(t) > 0$, então é necessário que

$$\theta' = 0 \quad \overset{\text{(B1)}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial u} + \underbrace{\theta'}_{=0} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u}$$

Se $u = 0$:

No problema do item (a), como $u(t) = 0$ e por (A1), temos que

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \leq 0$$

No problema do item (b), como $u(t) = 0$ e por (B3), temos que

$$\theta' \geq 0 \quad \overset{\text{(B1)}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial u} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} + \underbrace{\theta'}_{\geq 0} = 0$$

Logo, como $\theta' \geq 0$, temos que $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \leq 0$ para satisfazer a igualdade acima. $\blacksquare$

**10.1.5 [⊠]**

**In a maximization problem let there be two state variables $(y_1, y_2)$, two control variables $(u_1, u_2)$, one inequality constraint, and one inequality integral constraint. The initial states are fixed, but the terminal states are free at a fixed $T$.**

---

**(a) Write the problem statement.**

---

$$\text{Maximizar} \int_0^T F(t, y_1, y_2, u_1, u_2)dt \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, u_1, u_2) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, u_1, u_2) \\ g(t, y_1, y_2, u_1, u_2) \leq c \\ \int_0^T G(t, y_1, y_2, u_1, u_2)dt \leq k \\ y(0) = y_0, \quad y(T) \text{ livre} \quad (y_0, T \text{ dados}) \end{cases}$$

Definindo nova variável de estado $\Gamma(t) = -\int_0^t G(t, y_1, y_2, u_1, u_2)dt \implies \dot{\Gamma} = -G$, temos

$$\text{Maximizar} \int_0^T F(t, y_1, y_2, u_1, u_2)dt \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, u_1, u_2) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, u_1, u_2) \\ g(t, y_1, y_2, u_1, u_2) \leq c \\ \dot{\Gamma} = -G(t, y_1, y_2, u_1, u_2) \\ y(0) = y_0, \quad y(T) \text{ livre} \quad (y_0, T \text{ dados}) \end{cases}$$

■

---

**(b) Define the Hamiltonian and the Lagrangian.**

---

A Hamiltoniana do problema é dada por

$$H = F(t, y_1, y_2, u_1, u_2) + \lambda_1 f_1(t, y_1, y_2, u_1, u_2) + \lambda_2 f_2(t, y_1, y_2, u_1, u_2) - \mu G(t, y_1, y_2, u_1, u_2)$$

Logo, considerando a restrição, temos que o Lagrangeano é dado por:

$$\mathscr{L} = H + \theta\left[c - g(t, y_1, y_2, u_1, u_2)\right] = F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \mu G + \theta[c - g]$$

■

---

**(c) List the maximum-principle conditions, assuming interior solutions.**

---

As condições do princípio máximo são:

$$\dot{y}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_j} \qquad j = 1, 2 \qquad \text{(eq. movimento para } y_j\text{)}$$

$$\dot{\lambda}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_j} \qquad j = 1, 2 \qquad \text{(eq. movimento para } \lambda\text{)}$$

$$\dot{\Gamma} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} \qquad \text{(eq. movimento para } \Gamma\text{)}$$

$$\dot{\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Gamma} \qquad \text{(eq. movimento para } \mu\text{)}$$

$$\lambda(T) = 0 \qquad \text{(TVC para } y\text{)}$$

$$\mu(T) \geq 0, \qquad \Gamma(T) + k \geq 0, \qquad \mu(T).\left[\Gamma(T) + k\right] = 0 \qquad \text{(TVC para } \Gamma\text{)}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = 0, \qquad \text{para } j = 1, 2 \qquad \text{(CPOs para } \max \mathscr{L}\text{)}$$

■

## Referências


Chiang, A. (1999). *Elements of Dynamic Optimization*. Waveland Press.