The Neoclassical Theory of Optimal Growth

Alpha C. Chiang (1999) - Seção 9.3

Apresentação por Fábio Nishida

Julho, 2021

O Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo

Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo (1/7)

- Extensão do modelo de Ramsey de comportamento de poupança (Seção 5.3)
- Baseado no artigo clássico de David Cass[a]:
  - Formula o problema por controle ótimo, ao invés de cálculo de variações
  - A força de trabalho (população) cresce a uma taxa constante exógena $n > 0$ (Ramsey assume $n = 0$)
  - A utilidade social está sujeita ao desconto temporal a uma taxa constante $\rho > 0$ (Ramsey assume $\rho = 0$)
- Função de produção neoclássica:

$$Y = Y(K, L)$$

com retornos de escala constantes, produtos marginais positivos e retornos decrescentes para cada input.

[a] David Cass, "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, July 1965, pp. 233–240.

- A função produção, linearmente homogênea, pode ser reescrita em termos per capita:

$$y \equiv \frac{Y}{L} \qquad \text{(produto médio do trabalho)}$$

$$k \equiv \frac{K}{L} \qquad \text{(razão capital-trabalho)}$$

- Assume-se a função de produção como

$$y = \phi(k) \qquad \text{com } \phi' > 0 \quad \text{e} \quad \phi''(k) < 0, \quad \forall k > 0 \tag{9.22}$$

- Adicionalmente, assume-se

$$\lim_{k \to 0} \phi'(k) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{k \to \infty} \phi'(k) = 0$$

Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo (3/7)

- Gráfico de $\phi(k)$:

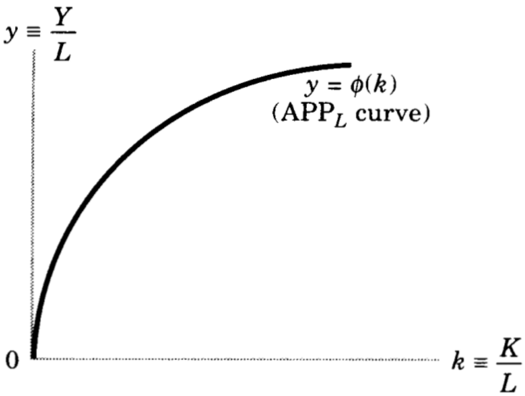


FIGURE 9.1

Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo (4/7)

- O output total Y é alocado em consumo C ou investimento bruto I_g, logo, investimento líquido, $I = \dot{K}$, pode ser escrito como

$$\dot{K} = I_g - \delta K = Y - C - \delta K \qquad (\delta = \text{taxa de depreciação})$$

- Dividindo $\dot{K}$ por L, e definindo $c \equiv C/L$ para consumo per capita, temos

$$\frac{1}{L}\dot{K} = y - c - \delta k = \phi(k) - c - \delta k \tag{9.23}$$

- Note que, no lado direito de (9.23), todas variáveis são per capita, enquanto no lado esquerdo não são.

- Para reescrevermos a (9.23) com termos per capita, usaremos a relação

$$\begin{aligned}
\dot{K} \equiv \frac{d}{dt}K = \frac{d}{dt}(kL) & & (k \equiv K/L) \\
= k\dot{L}\left(\frac{L}{L}\right) + L\dot{k} & & \text{(regra do produto)} \\
= knL + L\dot{k} & & (n \equiv \tfrac{\dot{L}}{L} \ \text{ tx. crescimento do trab.)} \\
= L(kn + \dot{k}) & &
\end{aligned}$$

- Substituindo $\dot{K}$ em (9.23), obtemos

$$\frac{1}{L}L(kn + \dot{k}) = \phi(k) - c - \delta k$$

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n + \delta)k \tag{9.24}$$

Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo (6/7)

- $\dot{k}$ descreve como a razão capital-trabalho, k, varia ao longo do tempo
- Nível de consumo, c, determina a utilidade/bem-estar da sociedade em todo tempo
- Logo, supõe-se que a função índice de utilidade social tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &U'(c) > 0 \qquad U''(c) < 0, \qquad \forall c > 0 \\ &\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{c \to \infty} U'(c) = 0 \end{aligned} \tag{9.25}$$

- A função $U(c)$ é somada ao longo do tempo e ponderada pelo tamanho do trabalho, L. Logo, a funcional objetivo é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^\infty U(c)L(t)e^{-\rho t}dt &= \int_0^\infty U(c)L_0e^{nt}e^{-\rho t}dt \qquad (L(t) = L_0e^{nt}) \\ &= L_0\int_0^\infty U(c)e^{-(\rho-n)t}dt \end{aligned} \tag{9.26}$$

Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo (7/7)

- Cass assume que $L_0 = 1$ e, para garantir convergência, que $\rho - n > 0$.
- Logo, definindo $r \equiv \rho - n > 0$, a funcional se reduz a

$$\int_0^\infty U(c)e^{-rt}dt \tag{9.26'}$$

- Logo, o problema de crescimento ótimo é dado por

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty U(c)e^{-rt}dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \\ k(0) = k_0, \\ 0 \leq c \leq \phi[k(t)] \end{cases} \tag{9.27}$$

em que k é a variável de estado e c é a variável de controle.

*região de controle de c, $[0, \phi[k(t)]]$, é demonstrada no slide 12

O Princípio Máximo

O Princípio Máximo (1/3)

- A Hamiltoniana é dada por

$$H = U(c)e^{-rt} + \lambda[\phi(k) - c - (n+\delta)k] \qquad (9.28)$$

- O pico de H ocorre entre $c = 0$ e $c = c_1$ (arbitrário)

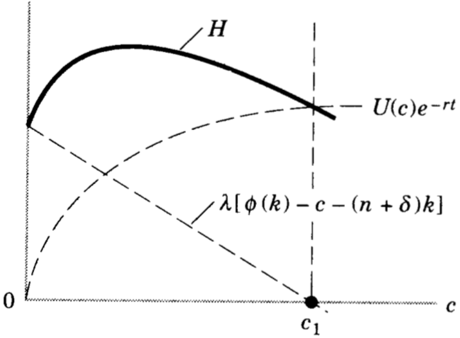


FIGURE 9.2

O Princípio Máximo (2/3)

- Como $c = c_1$ é o consumo tal que, no 2º termo da H (linearmente decrescente em c),

$$\phi(k) - c_1 - (n+\delta)k = 0,$$

segue que

$$c_1 = \phi(k) - (n+\delta)k$$

e concluímos que $c_1 < \phi(k)$ pois $(n+\delta)k > 0$.

- Logo, o c que maximiza a Hamiltoniana é interior na região de controle $[0, \phi(k)]$
- Então, podemos maximizar H por CPO

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-rt} - \lambda = 0 \iff U'(c) = \lambda e^{rt} \qquad (9.29)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c^2} = U''(c)e^{-rt} < 0 \implies \text{ponto de máximo}$$

O Princípio Máximo (3/3)

- O princípio do máximo precisa de duas equações diferenciais:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda[\phi'(k) - (n + \delta)] \tag{9.30}$$

$$\dot{k} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \phi(k) - c - (n + \delta)k \tag{9.31}$$

- As três equações de (9.29) a (9.31) permitem resolver as três variáveis c, λ e k.
  - Porém, sem o conhecimento da forma específica de $U(c)$ e $\phi(k)$, podemos apenas fazer uma análise qualitativa do modelo.

A Hamiltoniana de Valor Corrente

A Hamiltoniana de Valor Corrente

- Multiplicando (9.28) por e^{rt} e definindo $H_c \equiv He^{rt}$ e $m = \lambda e^{rt}$, obtemos

$$H_c = U(c) + m[\phi(k) - c - (n+\delta)k] \tag{9.32}$$

- Neste caso, o princípio máximo requer que $\partial H_c / \partial c = U'(c) - m = 0$, ou seja,

$$m = U'(c) \tag{9.33}$$

  que, de fato, maximiza pois $\partial^2 H_c / \partial c^2 = U''(c) < 0$ (por 9.25).

- As equações de movimento das variável de estado e de coestado são:

$$\dot{k} = \frac{\partial H_c}{\partial m} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \tag{9.34}$$

$$\dot{m} = -\frac{\partial H_c}{\partial k} + rm = -m[\phi'(k) - (n+\delta)] + rm = -m[\phi'(k) - (n+\delta+r)] \tag{9.35}$$

O Diagrama de Fase

O Diagrama de Fase (1/5)

- As equações de movimento $\dot{k}$ e $\dot{m}$ estão no espaço $k \times m$
- Como é mais complicado eliminar c do que m em (9.34), eliminaremos m e faremos o Diagrama de Fase no espaço $k \times c$.
- Primeiro, vamos diferenciar a equação (9.33) em relação a t:

$$m = U'[c(t)] \quad \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \quad \dot{m} = U''(c)\dot{c}$$

- Substituindo m e $\dot{m}$ em (9.35), obtemos a equação diferencial de $\dot{c}$:

$$\begin{aligned} U''(c)\dot{c} &= -U'(c)[\phi'(k) - (n + \delta + r)] \\ \dot{c} &= -\frac{U'(c)}{U''(c)}[\phi'(k) - (n + \delta + r)] \qquad (9.36) \end{aligned}$$

O Diagrama de Fase (2/5)

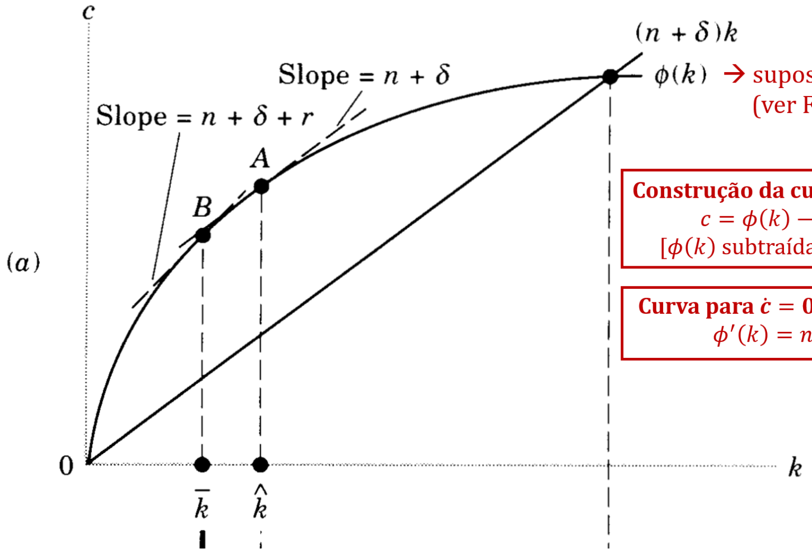
- Para construir o diagrama de fase, começamos com o desenho das curvas quando $\dot{k} = 0$ e $\dot{c} = 0$, definidas por:

$$\begin{aligned} \dot{k} = 0 &= \phi(k) - c - (n+\delta)k \\ c &= \phi(k) - (n+\delta)k \qquad [\text{curva para } \dot{k} = 0] \qquad (9.37) \end{aligned}$$

$$\dot{c} = 0 = -\frac{U'(c)}{U''(c)}[\phi'(k) - (n+\delta+r)]\left(-\frac{U''(c)}{U'(c)}\right) \qquad (a)$$

$$\phi'(k) = n+\delta+r \qquad [\text{curva para } \dot{c} = 0] \qquad (9.38)$$

(a) $-U''(c)/U'(c)$ é positivo por suposição em (9.25), então expressão em colchetes precisa ser zero



→ suposto em (9.22) (ver Figura 9.1)

Construção da curva para $\dot{k} = 0$:
$c = \phi(k) - (n+\delta)k$
$[\phi(k)$ subtraída de $(n+\delta)k]$

Curva para $\dot{c} = 0$ na inclinação:
$\phi'(k) = n + \delta + r$

O Diagrama de Fase (4/5)

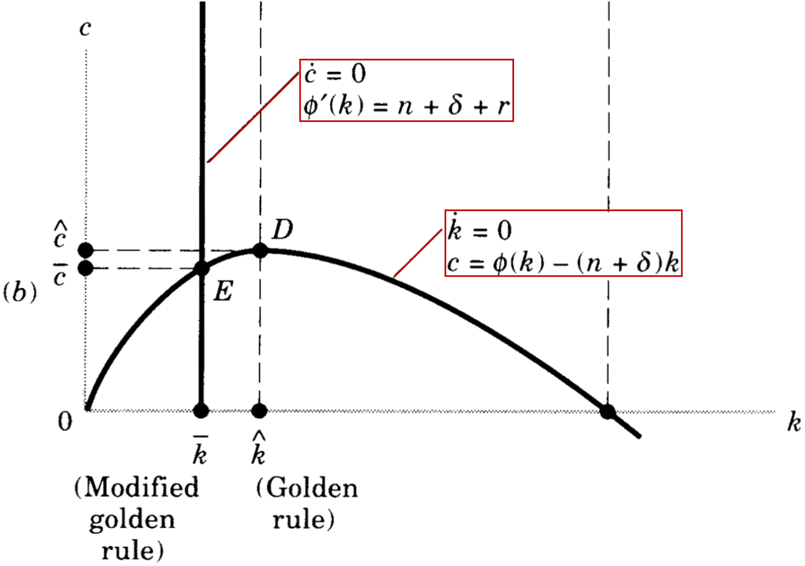


FIGURE 9.3

O Diagrama de Fase (5/5)

- A interseção das duas curvas determinam os valores estacionários de k e c, denotados por $\bar{k}$ e $\bar{c}$, conhecidos por valores da *regra de ouro modificada*.
- A inclinação $n+\delta$ determina os valores da *regra de ouro* do modelo de Shell (seção 9.2), o qual <u>não considera desconto temporal</u>.
- Como a inclinação de $\phi(k)$ da regra de ouro modificada, $n+\delta+r$, é maior do que da regra de ouro, $n+\delta$, então:

$$\bar{k} < \hat{k} \qquad \text{e} \qquad \bar{c} < \hat{c}$$

Análise do Diagrama de Fase

Análise do Diagrama de Fase (1/5)

- Para fazermos análise do diagrama de fase, precisamos saber as direções gerais a partir das equações de movimento $\dot{k}$ (9.34) e $\dot{c}$ (9.36):

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0 \tag{9.39}$$

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}\phi''(k) < 0 \tag{9.40}$$

pois $U''(c)/U''(c) < 0$ por (9.25), e $\phi''(k) < 0$ por (9.22).

- Por (9.39), quando c cresce (indo para cima), $\dot{k}$ diminui:
  - $\dot{k} > 0$ abaixo da curva $\dot{k} = 0$, e $\dot{k} < 0$ acima da curva $\dot{k} = 0$
- Por (9.40), quando k cresce (indo para cima), $\dot{c}$ diminui:
  - $\dot{c} > 0$ à esquerda da curva $\dot{c} = 0$, e $\dot{c} < 0$ à direta da curva $\dot{c} = 0$

Análise do Diagrama de Fase (2/5)

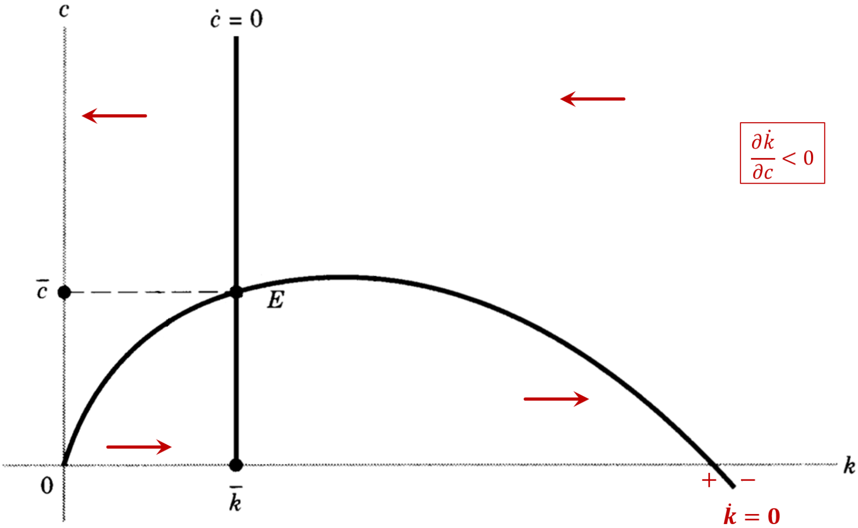


FIGURE 9.4

Análise do Diagrama de Fase (3/5)

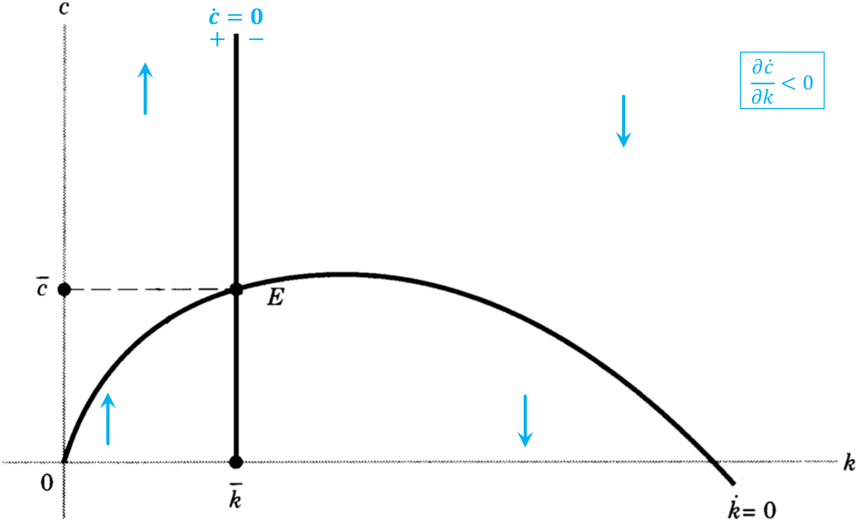


FIGURE 9.4

Análise do Diagrama de Fase (4/5)

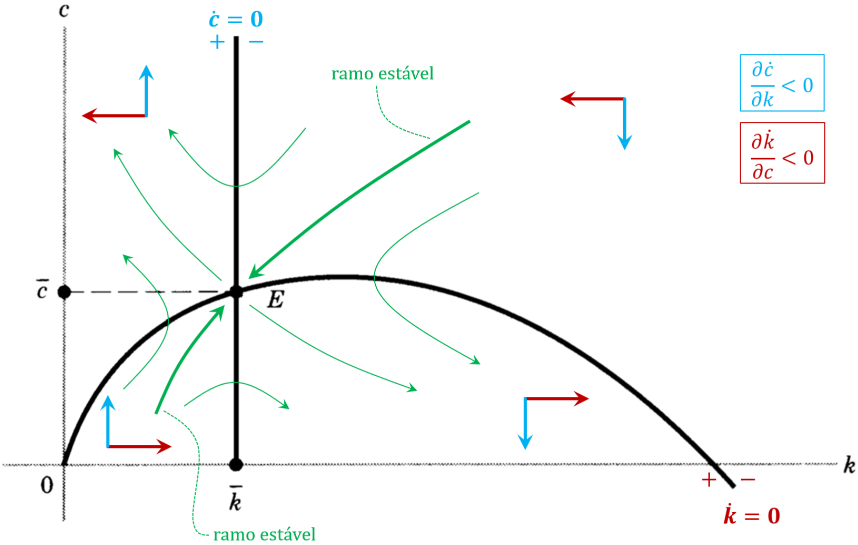


FIGURE 9.4

Análise do Diagrama de Fase (5/5)

- Dadas as configurações das curvas $\dot{k} = 0$ e $\dot{c} = 0$, o estado estacionário é único.
- A constância de $\bar{k}$ implica que $\bar{y} = \phi(\bar{k})$ também seja constante.
- Como $k \equiv K/L$ e $y \equiv Y/L$, no ponto E, temos que Y, K, e L crescem na mesma taxa.
  - condição necessária de um estado estacionário ou equilíbrio de crescimento.

- Única forma da economia ir para o estado estacionário é por meio de um dos ramos estáveis, que levam ao ponto de equilíbrio intertemporal E, $(\bar{k}, \bar{c})$.
  - Isso implica que, dado uma razão capital-trabalho inicial k_0, é necessário escolher um nível de consumo per capita c_0, tal que (k_0, c_0) esteja em um ramo estável.

- Note que, mesmo em E, o consumo per capita permanece constante, pois assumimos uma função produção estática, $Y = Y(K, L)$.
  - Para tornar possível o aumento do consumo per capita, precisamos incluir o progresso tecnológico (Seção 9.4)