Trading Off Inflation and Unemployment

Alpha C. Chiang (1999) - Seções 2.5 e 3.2

Apresentação por Fábio Nishida

Junho, 2021

Seção 2.5 - Trading Off Inflation and Unemployment

A Função de Perda Social (1/3)

- Modelo de Taylor[a]: Trade-off Inflação $\times$ Desemprego, mas com estágio terminal T.
- $(Y_f - Y)$ é a proxy de desemprego
  - Y_f é a renda no pleno emprego
  - Y é a renda atual
- p é a taxa de inflação
- **Função de Perda Social**

$$\lambda = (Y_f - Y)^2 + \alpha p^2, \tag{2.39}$$

com $\alpha > 0$. Note que, qualquer desvio (para cima ou abaixo) da renda no pleno emprego e do cenário sem inflação, gera perda social.

[a]Dean Taylor, "Stopping Inflation in the Fornbusch Model: Optimal Monetary Policies with Alternate Price-Adjustment Equations," *Journal of Macroeconomics*, 1989.

A Função de Perda Social (2/3)

- O trade-off de Phillips com expectativas que relaciona $(Y_f - Y)$ e p é dada por:

$$p = -\beta\,(Y_f - Y) + \pi \tag{2.40}$$

em que $\beta > 0$ e π é a expectativa da taxa de inflação.

- A formação da expectativa de inflação é adaptativa:

$$\pi' = j(p - \pi) \tag{2.41}$$

em que $0 < j \leq 1$. Se expectativa de inflação foi subestimada $(p > \pi)$, então $\pi' > 0$ e π será revisado para cima.

A Função de Perda Social (3/3)

- Aplicando (2.40) em (2.41), obtemos

$$\pi' = j\left[p - p - \beta(Y_f - Y)\right] = -\beta j\,(Y_f - Y)$$

$$Y_f - Y = -\frac{\pi'}{\beta j} \tag{2.42}$$

- Aplicando (2.42) em (2.40), obtemos

$$p = -\beta\left(-\frac{\pi'}{\beta j}\right) + \pi \;=\; \frac{\pi'}{j} + \pi \tag{2.43}$$

- Usando (2.42) e (2.43) em (2.39), temos a função de perda social em termos de π e π':

$$\lambda(\pi, \pi') = \left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2 \tag{2.44}$$

O Problema

- O governo quer encontrar a trajetória ótima de π que minimize a perda social total entre períodos 0 e T.
- Assumem-se expectativas de inflação inicial $\pi(0) = \pi_0$ e terminal $\pi(T) = 0$.
- Todas perdas serão trazidas a valor presente pela taxa de desconto ρ.
- Portanto, o problema do policymaker é dado por

$$\text{Minimizar} \quad \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t} dt \tag{2.45}$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} \pi(0) = \pi_0 & (\pi_0 > 0 \text{ dado}) \\ \pi(T) = 0 & (T \text{ dado}) \end{cases}$$

em que $e^{-\rho t}$ é o termo que traz a perda social a valor presente.

A Trajetória Ótima (1/6)

- O integrando de (2.45), $F \equiv \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t} = \left[\left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2\right] e^{-\rho t}$, tem as primeiras derivadas:

$$F_\pi = \left[2\alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)(1)\right] e^{-\rho t} = 2\left(\frac{\alpha}{j}\pi' + \alpha\pi\right) e^{-\rho t}$$

$$\begin{aligned} F_{\pi'} &= \left[2\left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)\frac{1}{\beta j} + 2\alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)\frac{1}{j}\right] e^{-\rho t} = 2\left(\frac{\pi'}{\beta^2 j^2} + \alpha\frac{\pi'}{j^2} + \alpha\frac{\pi}{j}\right) e^{-\rho t} \\ &= 2\left(\frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right) e^{-\rho t} \end{aligned}$$

A Trajetória Ótima (2/6)

- E com as segundas derivadas:

$$F_{\pi'\pi'} = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t}$$

$$F_{\pi\pi'} = \frac{2\alpha}{j}e^{-\rho t}$$

$$F_{t\pi'} = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t}.(-\rho) = -2\rho\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t}$$

- Lembre-se que a Equação de Euler tem a seguinte forma:

$$F_{\pi'\pi'}.\pi''(t) + F_{\pi\pi'}.\pi'(t) + F_{t\pi'} - F_{\pi} = 0 \tag{2.19}$$

A Trajetória Ótima (3/6)

Logo, substituindo as derivadas parciais na equação de Euler (2.19), segue que

$$0 = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t}\pi'' + \frac{2\alpha}{j}e^{-\rho t}\pi' - 2\rho\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t} - 2\left(\frac{\alpha}{j}\pi' + \alpha\pi\right)e^{-\rho t}$$

$$0 = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t}\pi'' + \left[\frac{2\alpha}{j} - 2\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} - 2\frac{\alpha}{j}\right]e^{-\rho t}\pi' + \left[-2\rho\frac{\alpha}{j} - 2\alpha\right]e^{-\rho t}\pi$$

$$0 = \left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi'' + \left[\frac{\alpha}{j} - \rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} - \frac{\alpha}{j}\right]\pi' + \left[-\rho\frac{\alpha}{j} - \alpha\right]\pi$$

$$0 = \left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi'' - \left(\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi' - \left(\frac{\alpha(\rho+j)}{j}\right)\pi$$

$$0 = \left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\left(\frac{\beta^2 j^2}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi'' - \left(\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\left(\frac{\beta^2 j^2}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi' - \left(\frac{\alpha(\rho+j)}{j}\right)\left(\frac{\beta^2 j^2}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi$$

$$0 = \pi'' - \rho\pi' - \left(\frac{\alpha\beta^2 j(\rho+j)}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi \quad\Longleftrightarrow\quad \pi'' - \rho\pi' - \Omega\pi = 0 \tag{2.46}$$

A Trajetória Ótima (4/6)

- Note que a Equação de Euler (2.46) é uma equação diferencial de 2ª ordem com coeficiente constantes e termo constante:

$$\pi'' + a_1\pi' + a_2\pi = a_3$$

- em que a solução geral é dada por[a]:

$$\pi(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{\pi}$$

- com as raízes r_1 e r_2 dadas por

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right)$$

- e com a integral particular $\bar{\pi} = a_3/a_2$

[a] Ver Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 4th ed., 2005, Sec. 16.1.

A Trajetória Ótima (5/6)

- A solução geral deste problema é dado por

$$\pi^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{\pi} \tag{2.47}$$

- A partir de (2.46), temos que

$$a_1 = -\rho \qquad a_2 = -\Omega \qquad a_3 = 0$$

- Logo,

$$\bar{\pi} = 0 \qquad \text{e} \qquad r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}\right) \qquad \left(\Omega \equiv \frac{\alpha\beta^2 j(\rho+j)}{1+\alpha\beta^2}\right)$$

- Como $\Omega > 0$, então $\rho = \sqrt{\rho^2} < \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}$ e , portanto,

$$r_1 > 0 \qquad \text{e} \qquad r_2 < 0 \tag{2.48}$$

A Trajetória Ótima (6/6)

- Pela condições inicial e terminal, temos as seguintes relações

$$\pi(0) = \pi_0 = A_1 + A_2$$

$$\pi(T) = 0 = A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} \iff A_1 = -A_2 \frac{e^{r_2 T}}{e^{r_1 T}}$$

- Aplicando A_1 em π_0:

$$A_2 + \left(-A_2 \frac{e^{r_2 T}}{e^{r_1 T}}\right) = \pi_0 \iff A_2 \left(1 - \frac{e^{r_2 T}}{e^{r_1 T}}\right) = \pi_0 \iff A_2 = \frac{\pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}$$

- Logo,

$$A_1 = \pi_0 - \frac{\pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} = \frac{\pi_0 (e^{r_1 T} - e^{r_2 T}) - \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} = \frac{-\pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} \tag{2.49}$$

Seção 3.2 - Linha Terminal Vertical

Linha Terminal Vertical (1/5)

- Agora, ao invés de $\pi(T) = 0$, consideraremos que $\pi(T)$ pode variar (e T continua fixo), ou seja, temos uma linha vertical terminal.
- A solução geral da equação de Euler é

$$\pi^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \tag{3.23}$$

- A condição inicial permanece $\pi(0) = \pi_0 > 0$, então

$$A_1 + A_2 = \pi_0. \tag{3.24}$$

- Como $\pi(T)$ é variável, precisamos utilizar a **condição de transversalidade** é dado por:

$$\left[F - y' F_{y'}\right]_{t=T} \Delta T + \left[F_{y'}\right]_{t=T} \Delta y_T = 0 \tag{3.9}$$

Linha Terminal Vertical (2/5)

- Como $\Delta T = 0$ (pois T é fixo) e Δy_T é variável, precisamos que

$$\left[F_{y'}\right]_{t=T} = 0$$

para que a condição de transversalidade seja válida.

- No modelo de tradeoff, segue que:

$$F_{\pi'} = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho T} = 0. \qquad (\text{quando } t = T)$$

Logo, precisamos que o termo em parêtesis seja igual a zero:

$$\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi = 0 \iff \pi' + \frac{\alpha\beta^2 j}{1+\alpha\beta^2}\pi = 0 \iff \qquad \left(\sigma \equiv \tfrac{\alpha\beta^2 j}{1+\alpha\beta^2}\right)$$

$$\pi'(T) + \sigma\pi(T) = 0 \qquad (3.25')$$

Linha Terminal Vertical (3/5)

- Derivando $\pi(t)$ de (3.23), obtemos

$$\pi'^{*}(t) = r_1 A_1 e^{r_1 t} + r_2 A_2 e^{r_2 t} \tag{3.23'}$$

- Aplicando (3.23) e (3.23') em (3.25'), para o período T, segue que

$$\begin{aligned}(r_1 A_1 e^{r_1 T} + r_2 A_2 e^{r_2 T}) + \sigma(A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T}) &= 0 \\ (r_1 + \sigma) A_1 e^{r_1 T} + (r_2 + \sigma) A_2 e^{r_2 T} &= 0 \\ A_1 = -A_2 \frac{(r_2 + \sigma) e^{r_2 T}}{(r_1 + \sigma) e^{r_1 T}} & \qquad (3.25'')\end{aligned}$$

Linha Terminal Vertical (4/5)

- Substituindo (3.25") em (3.24), temos

$$\left(-A_2\frac{(r_2+\sigma)e^{r_2 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T}}\right)+A_2=\pi_0 \iff A_2\left(1-\frac{(r_2+\sigma)e^{r_2 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T}}\right)=\pi_0$$

$$A_2=\frac{\pi_0(r_1+\sigma)e^{r_1 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T}-(r_2+\sigma)e^{r_2 T}} \tag{3.26}$$

- Logo, substituindo A_2 em (3.25"),

$$A_1=-\frac{\pi_0(r_1+\sigma)e^{r_1 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T}-(r_2+\sigma)e^{r_2 T}}\cdot\frac{(r_2+\sigma)e^{r_2 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T}}$$

$$=\frac{-\pi_0(r_2+\sigma)e^{r_2 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T}-(r_2+\sigma)e^{r_2 T}} \tag{3.26'}$$

Linha Terminal Vertical (5/5)

- Substituindo A_1 e A_2 em (3.23) para $t = T$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\pi^*(T) &= A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} \\
&= \left(\frac{-\pi_0 (r_2 + \sigma) e^{r_2 T}}{(r_1 + \sigma) e^{r_1 T} - (r_2 + \sigma) e^{r_2 T}} \right) e^{r_1 T} + \left(\frac{\pi_0 (r_1 + \sigma) e^{r_1 T}}{(r_1 + \sigma) e^{r_1 T} - (r_2 + \sigma) e^{r_2 T}} \right) e^{r_2 T} \\
&= \frac{\pi_0 e^{r_1 T} e^{r_2 T} \left[(r_1 + \sigma) - (r_2 + \sigma) \right]}{(r_1 + \sigma) e^{r_1 T} - (r_2 + \sigma) e^{r_2 T}} \\
&= \frac{\pi_0 e^{r_1 T} e^{r_2 T} (r_1 + r_2)}{(r_1 + \sigma) e^{r_1 T} - (r_2 + \sigma) e^{r_2 T}} > 0.
\end{aligned}
$$

- Portanto, o processo de otimização não requer que a taxa esperada de inflação seja igual a zero no estágio terminal.