Dynamic Optimization of a Monopolist: Modelo Clássico de Evans

Alpha C. Chiang (1999) - Seção 2.4

Apresentação por Fábio Nishida

Junho, 2021

Uma Função Lucro Dinâmica (1/2)

- Economia com um monopolista que produz uma única commodity.
- Função **custo total** quadrática:

$$C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma \tag{2.31}$$

em que $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

- **Output** Q é sempre igual à quantidade demandada no período t e depende do **preço** $P(t)$ e da **taxa de mudança do preço** $P'(t)$:

$$Q = a - bP(t) + hP'(t) \tag{2.32}$$

em que $a, b > 0$ e $h \neq 0$.

Uma Função Lucro Dinâmica (2/2)

O **lucro** da firma, π, é dado por:

$$\begin{aligned}
\pi &= PQ - C \\
&= PQ - (\alpha Q^2 + \beta Q + \gamma) && \text{(aplicando } C\text{)} \\
&= P(a - bP + hP') - \alpha(a - bP + hP')^2 - \beta(a - bP + hP') - \gamma && \text{(aplicando } Q\text{)} \\
&= P(a - bP + hP') - \alpha(a^2 + b^2P^2 + h^2P'^2 - 2abP + 2ahP' - 2bhPP') \\
&\quad - \beta(a - bP + hP') - \gamma \\
&= P^2\left[-b - \alpha b^2\right] + P\left[a - (-2\alpha ab) - \beta(-b)\right] + P'^2\left[-\alpha h^2\right] + P'\left[-\alpha 2ah - \beta h\right] \\
&\quad + PP'\left[h - \alpha(-2bh)\right] + \left[-\alpha a^2 - \beta a - \gamma\right] && \text{(rearranjando } P^2, P, P'^2, P' \text{ e } PP'\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(P, P') = &-b(1 + \alpha b)P^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)P - \alpha h^2 P'^2 - h(2\alpha a + \beta)P' \\
&+ h(1 + 2\alpha b)PP' - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

O Problema

- O objetivo da firma é achar a trajetória ótima do preço P que maximiza a funcional Π no período finito $[0, T]$.
- Ambos **preço inicial** P_0 e **preço terminal** P_T são dados.

$$\text{Maximizar} \quad \Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P')dt \tag{2.34}$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} P(0) = P_0 & (P_0 \text{ dado}) \\ P(T) = P_T & (T, P_T \text{ dados}) \end{cases}$$

A Trajetória Ótima do Preço (1/7)

- Lembre-se que a Equação de Euler tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}F_{y'} - F_y = 0 \tag{2.18}$$

$$F_{y'y'}.y''(t) + F_{yy'}.y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0 \tag{2.19}$$

- Precisamos calcular as derivadas parciais a partir do integrando (2.33):

$$\pi_P = -2b(1+\alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1+2\alpha b)P'$$

$$\pi_{P'} = -2\alpha h^1 P' - h(2\alpha a + \beta) + h(1+2\alpha b)P$$

$$\pi_{P'P'} = -2\alpha h^2 \qquad \pi_{PP'} = h(1+2\alpha b) \qquad \pi_{tP'} = 0$$

Substituindo as derivadas parciais em (2.19):

$$\begin{aligned} \pi_{P'P'}.P'' + \pi_{PP'}.P' + \pi_{tP'} - \pi_P &= 0 \\ -2\alpha h^2.P'' + h(1+2\alpha b)P' - 0 - \left[-2b(1+\alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1+2\alpha b)P'\right] &= 0 \\ -2\alpha h^2.P'' + 2b(1+\alpha b)P - (a + 2\alpha ab + \beta b) &= 0 \end{aligned}$$

$$-2\alpha h^2.P'' + 2b(1+\alpha b)P = a + 2\alpha ab + \beta b$$

$$P''(t) - \frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}P(t) = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2} \tag{2.35}$$

A Trajetória Ótima do Preço (3/7)

- Note que a Equação de Euler (2.35) é uma equação diferencial de 2ª ordem com coeficiente constantes e termo constante:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = a_3$$

- em que a solução geral é dada por[a]:

$$y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{y}$$

- com as raízes r_1 e r_2 dadas por

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right)$$

- e com a integral particular $\bar{y} = a_3/a_2$

[a] Ver Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 4th ed., 2005, Sec. 16.1.

A Trajetória Ótima do Preço (4/7)

- A solução geral deste problema é dado por

$$P^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{P} \tag{2.36}$$

- A partir de (2.35), sabemos que:

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = -\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2} \qquad a_3 = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}$$

- Portanto,

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left[-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\left(-\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}\right)}\right] = \pm\sqrt{\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}}$$

$$\bar{P} = \frac{-\frac{a+2\alpha ab+\beta b}{2\alpha h^2}}{-\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}} = \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1+\alpha b)}$$

- Como $r_1 = -r_2$, defina $r \equiv r_1$, logo $r_2 = -r$.
- A solução geral pode ser reescrita como

$$P^*(t) = A_1 e^{rt} + A_2 e^{-rt} + \bar{P} \tag{2.36'}$$

- Podemos calcular A_1 e A_2 a partir das condições inicial, P_0, e terminal, P_T, dadas por:

$$P(0) = P_0 = A_1 e^{r.0} + A_2 e^{-r.0} + \bar{P} = A_1 + A_2 + \bar{P} \tag{a}$$

$$P(T) = P_T = A_1 e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \bar{P} \tag{b}$$

- Note que, se essas 2 condições não fossem dadas, não conseguiríamos resolver o sistema acima sem utilizar uma condição de transversalidade.
- Isolando A_1 em (a), obtemos

$$A_1 = P_0 - \bar{P} - A_2$$

- Substituindo A_1 em (b), segue que:

$$
\begin{aligned}
(P_0 - \bar{P} - A_2)e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \bar{P} &= P_T \\
A_2(e^{-rT} - e^{rT}) + (P_0 - \bar{P})e^{rT} &= P_T - \bar{P} \\
A_2(e^{-rT} - e^{rT}) &= P_T - \bar{P} - (P_0 - \bar{P})e^{rT} \\
A_2 &= \frac{P_T - \bar{P} - (P_0 - \bar{P})e^{rT}}{e^{-rT} - e^{rT}} \left(\frac{e^{-rT}}{e^{-rT}}\right) \\
A_2 &= \frac{(P_T - \bar{P})e^{-rT} - (P_0 - \bar{P})e^{rT-rT}}{e^{-rT-rT} - e^{rT-rT}} \\
A_2 &= \frac{(P_T - \bar{P})e^{-rT} - (P_0 - \bar{P})}{e^{-2rT} - 1} \left(\frac{-1}{-1}\right) \\
A_2 &= \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}}.
\end{aligned}
$$

A Trajetória Ótima do Preço (7/7)

- Substituindo A_2 em A_1, temos:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= P_0 - \bar{P} - \left(\frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \right) \\
&= \frac{(P_0 - \bar{P})(1 - e^{-2rT}) - \left[P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}\right]}{1 - e^{-2rT}} \\
&= \frac{P_0 - \bar{P} - P_0 e^{-2rT} + \bar{P}e^{-2rT} - P_0 + \bar{P} + (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \\
&= \frac{(\bar{P} - P_0)e^{-2rT} + (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \left(\frac{e^{2rT}}{e^{2rT}} \right) \\
&= \frac{(\bar{P} - P_0)e^{-2rT+2rT} + (P_T - \bar{P})e^{-rT+2rT}}{1e^{2rT} - e^{-2rT+2rT}} \left(\frac{-1}{-1} \right) \\
A_1 &= \frac{(P_0 - \bar{P}) - (P_T - \bar{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}}.
\end{aligned}
$$