Condições de Kuhn-Tucker e Equações Diferenciais

Chiang & Wainwright (2005)[1] - Seções 13.1, 15.1, 15.3 e 16.1

Apresentação por Fábio Nishida

Julho, 2021

[1] *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 4th ed.

Seção 13.1: Condições de Kuhn-Tucker

- No problema de otimização clássico, com nenhuma restrição explícita nos sinais das variáveis de escolha e sem desigualdades nas restrições, a condição de primeira ordem para um extremo local é, simplesmente, as primeiras derivadas parciais iguais a zero.
- Em programação não-linear, existe uma condição similar à CPO, conhecida como condições de Kuhn-Tucker.

Efeito de Restrições Não-Negativas

- Tomando o caso para única variável, segue um problema

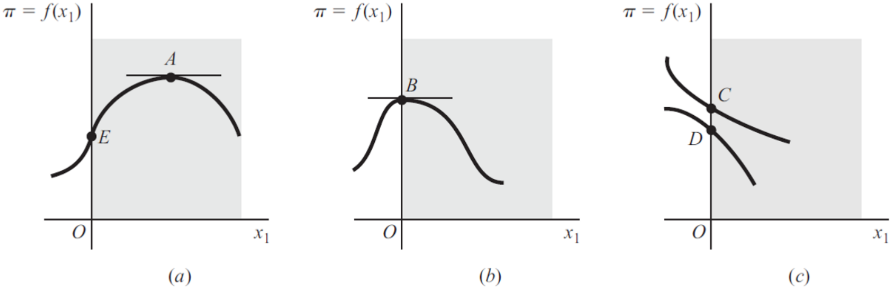
$$\text{Maximizar} \quad \pi = f(x_1), \qquad \text{sujeito a } x_1 \geq 0, \tag{13.1}$$

em que f é uma função diferenciável.

- Note que estabelecemos um $x_{min} = 0$. Caso não fosse 0, a restrição seria $x_1 - x_{min} \geq 0$

- Dada restrição $x_1 \geq 0$, há três possíveis situações
  1. Se o máximo local de ocorrer no interior da região destacada, tal como o ponto A, então temos solução interior. A CPO neste caso é $d\pi/dx_1 = f'(x_1) = 0$, igual ao prob. clássico.
  2. O máximo local pode também ocorrer no eixo vertical, como no ponto B, onde $x_1 = 0$. Novamente, temos a CPO $f'(x_1) = 0$.
  3. Um máximo local pode ocorrer nos pontos C ou D. Para ser um máximo local no problema (13.1), o ponto precisa estar acima dos pontos vizinhos dentro da região factível.

FIGURE 13.1



Condições de Kuhn-Tucker (3/4)

- O ponto máximo no problema pode ser caracterizado não apenas pela equação $f'(x_1) = 0$, mas também pela desigualdade $f'(x_1) < 0$.
- Note que a desigualdade oposta $f'(x_1) > 0$ pode ser excluída, pois em um ponto onde a curva é positivamente inclinada, não pode existir um máximo, mesmo se o ponto estiver localizado no eixo, como no ponto E na Fig. 13.1a.
- Resumindo o que foi exposto acima, para o valor x_1 nos dar o máximo local de no problema (13.1), deve satisfazer uma destas 3 condições:

$$f'(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad x_1 > 0 \qquad [\text{ponto A}] \tag{13.2}$$

$$f'(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = 0 \qquad [\text{ponto B}] \tag{13.3}$$

$$f'(x_1) < 0 \quad \text{e} \quad x_1 = 0 \qquad [\text{pontos C e D}] \tag{13.4}$$

Condições de Kuhn-Tucker (4/4)

- As 3 condições podem ser consolidadas em uma única:

$$f'(x_1) \leq 0, \quad x_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_1 f'(x_1) = 0 \tag{13.5}$$

- Na 3ª parte de (13.5), temos um aspecto importante em que, dos valores de x_1 e $f'(x_1)$, um deles deve ser igual a 0, o que torna o produto entre eles igual a zero.

- É similar à condição de transversalidade do problema de linha terminal vertical truncada:

$$\left[F_{y'}\right]_{t=T} \leq 0, \quad y_T^* \geq y_{min} \quad \text{e} \quad (y_T^* - y_{min})\left[F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \tag{3.17}$$

- No problema não-truncado, só usamos $[F_{y'}]_{t=T} = 0$.
- No problema truncado, caso o problema não se solucione com $[F_{y'}]_{t=T} = 0$ (ou seja, $y_T^* \ngeq y_{min}$), usamos $(y_T^* - y_{min}) = 0 \iff y_T^* = y_{min}$.

Seção 16.1: Equações Diferenciais de 2ª Ordem

- Uma equação diferencial de 1ª ordem com **coeficientes e termo constantes**, tem a seguinte forma:

$$y''(t) + a_1.y'(t) + a_2.y = a_3 \tag{16.2}$$

- A função complementar é dada por

$$y_c = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \qquad [r_1 \neq r_2] \tag{16.7}$$

tal que

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right) \tag{16.5}$$

- A integral particular é dada por $\bar{y} = a_3/a_2$, com $a_2 \neq 0$.
- Logo, a solução geral é

$$y(t) = y_c + \bar{y} = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \frac{a_3}{a_2}$$

Seções 15.1 e 15.3: Equações Diferenciais de 1ª Ordem

Eq. Diferencial de 1ª Ordem – Coeficiente e Termos Constantes

- Uma equação diferencial de 1ª ordem tem a seguinte forma

$$y' + u(t)y = w(t) \tag{15.1}$$

- No caso em que **coeficiente e termo são constantes**, temos $u(t) = a$ e $w(t) = b$
- No **caso homogêneo**, $b = 0$, a solução geral é dada por

$$y(t) = Ae^{-at} \tag{15.3}$$

- No **caso não-homogêneo**, $b \neq 0$, a função complementar e a integral particular são

$$y_c = Ae^{-at} \qquad \text{e} \qquad \bar{y} = \frac{b}{a}$$

tal que a solução geral é

$$y(t) = y_c + \bar{y} = Ae^{-at} + \frac{b}{a} \tag{15.5}$$

- No caso em que **coeficiente e termo são variáveis**, usamos a forma (15.1)

$$y' + u(t)y = w(t)$$

- No **caso homogêneo**, $w(t) = 0$, a solução geral é dada por

$$y(t) = e^{-c}e^{-\int u(t)dt} = Ae^{-\int u(t)dt} \tag{15.14}$$

- No **caso não-homogêneo**, $w(t) \neq 0$, a função complementar e a integral particular são

$$y_c = Ae^{-\int u(t)dt} \qquad \text{e} \qquad \bar{y} = \int we^{\int udt}dt \left(e^{-\int u(t)dt}\right)$$

tal que a solução geral é

$$y(t) = y_c + \bar{y} = e^{-\int u(t)dt}\left(A + \int we^{\int udt}dt\right) \tag{15.15}$$