Stochastic Neoclassical Growth Model

Dirk Krueger (2017) - Seção 6.4

Apresentação por Fábio Nishida

Maio, 2021

Formulação Recursiva com Incerteza

Problema Recursivo Com Incerteza (1/2)

$$v(k,z) = \max_{0 \leq k' \leq e^z F(k,1)+(1-\delta)k} \left\{ U\left[e^z F(k,1) + (1-\delta)k - k'\right] + \beta \sum_{z'} \pi\left(z'|z\right) v\left(k', z'\right) \right\} = Tv$$

em que:

- z: variável de choque de produtividade tal que $z \in Z = \{-1/5,\ 0,\ 1/5\}$
- $\pi(z'|z)$: probabilidade de ir ao estado z' dado que está no estado z tal que

$$\pi = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad \text{(matriz de transição)}$$

em que cada linha corresponde aos estados atuais $-1/5$, 0 e $1/5$, respectivamente, e as colunas correspondem aos estados futuros (para os quais um estado atual tem certas probabilidades de transitar).

Problema Recursivo Com Incerteza (2/2)

- Suponha $U(c) = \ln(c)$ e $n = 1$ (lazer não é valorizado). Logo, $F(k,1) = k^\alpha$.
- Seja $k, k' \in \mathscr{K} = \{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20\}$
- Palpite inicial: $v_0(k,z) = 0, \ \forall k, \forall z$, ou seja:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 3} \qquad \text{(1 linha para cada } k \in \mathscr{K} \text{ e 1 coluna para cada } z \in Z\text{)}$$

- Note que, diferente do capítulo 3 em que tínhamos apenas 1 estado e 1 função valor, aqui teremos 3 funções valor – uma para cada estado z.

1^{a} Iteração (1/3)

- Dadas as premissas assumidas, na 1ª iteração calcularemos:

$$v_1 \equiv \max_{0 \leq k' \leq e^z F(k,1)+(1-\delta)k} \left\{ \ln \left(e^z k^\alpha + (1-\delta)k - k' \right) \right\} = Tv_0$$

- Note que para cada k precisamos escolhe o k' em cada possível estado z. Logo, faremos cálculos em 5 matrizes (cada um dos possíveis capitais atuais k) de dimensões 5×3 (correspondendo aos possíveis capitais do próximo período k' e estados z).

Para k = 0.04

	-1/5	**0**	**1/5**
0.04	-1.303	-1.077	-0.856
0.08	-1.462	-1.202	-0.954
0.12	-1.652	-1.344	-1.064
0.16	-1.886	-1.511	-1.187
0.20	-2.192	-1.711	-1.328

(...)

- Note que maximizamos em cada coluna (para cada possível z).

1ª Iteração (2/3)

$k = 0.04$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-1.303	-1.077	-0.856
0.08	-1.462	-1.202	-0.954
0.12	-1.652	-1.344	-1.064
0.16	-1.886	-1.511	-1.187
0.20	-2.192	-1.711	-1.328

$k = 0.08$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-1.068	-0.847	-0.63
0.08	-1.191	-0.945	-0.708
0.12	-1.333	-1.053	-0.793
0.16	-1.497	-1.175	-0.885
0.20	-1.694	-1.314	-0.987

$k = 0.12$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-0.933	-0.715	-0.5
0.08	-1.04	-0.8	-0.568
0.12	-1.16	-0.893	-0.641
0.16	-1.297	-0.996	-0.72
0.20	-1.455	-1.111	-0.806

$k = 0.16$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-0.838	-0.622	-0.408
0.08	-0.935	-0.699	-0.47
0.12	-1.043	-0.783	-0.536
0.16	-1.163	-0.874	-0.607
0.20	-1.3	-0.975	-0.683

$k = 0.20$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-0.765	-0.55	-0.337
0.08	-0.855	-0.622	-0.395
0.12	-0.954	-0.699	-0.456
0.16	-1.064	-0.783	-0.521
0.20	-1.187	-0.875	-0.591

v_1	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-1.303	-1.077	-0.856
0.08	-1.068	-0.847	-0.63
0.12	-0.933	-0.715	-0.5
0.16	-0.838	-0.622	-0.408
0.20	-0.765	-0.55	-0.337

$g_{k,1}(k)$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	0.04	0.04	0.04
0.08	0.04	0.04	0.04
0.12	0.04	0.04	0.04
0.16	0.04	0.04	0.04
0.20	0.04	0.04	0.04

$1^{\underline{a}}$ Iteração (3/3)

- Ao escolher o k' que maximizar cada coluna (estado z) de cada uma dessas 5 matrizes ("tornando cada matriz em uma linha") e obtemos v_1 e $g_{k,1}$:

v_1

	-1/5	**0**	**1/5**
k = 0.04	-1.303	-1.077	-0.856
k = 0.08	-1.068	-0.847	-0.630
k = 0.12	-0.933	-0.715	-0.500
k = 0.16	-0.838	-0.622	-0.408
k = 0.20	-0.765	-0.55	-0.337

$g_{k,1} = k'$

	-1/5	**0**	**1/5**
k = 0.04	0.04	0.04	0.04
k = 0.08	0.04	0.04	0.04
k = 0.12	0.04	0.04	0.04
k = 0.16	0.04	0.04	0.04
k = 0.20	0.04	0.04	0.04

- Como $v_1 = Tv_0 \neq v_0$, faremos outra iteração.

2ª Iteração (1/2)

- Na 2ª iteração calcularemos:

$$v_2 \equiv \max_{0 \leq k' \leq e^z F(k,1)+(1-\delta)k} \left\{ \ln\left(e^z k^\alpha + (1-\delta)k - k'\right) + \beta \sum_{z'} \pi\left(z'|z\right) v_1\left(k', z'\right) \right\} = Tv_1$$

- Focaremos em como calcular o 2º termo da equação, $\beta \sum_{z'} \pi\left(z'|z\right) v\left(k', z'\right)$:
  - Para cada z, pegamos as probabilidades de transição para cada possível estado z', multiplicamos pelos valores correspondentes em v_1 (de acordo com k' e z') e depois somamos estes valores para obter o valor esperado de $v_1(k', z')$.
  - Isso pode ser calculado via produto vetorial. Para $z = 0$ e $k' = 0.04$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.303 \\ -1.077 \\ -0.856 \end{bmatrix} = -1.0777$$

Foram usadas a 2ª linha da matriz de transição ($z = 0$) e a 1ª linha de v_1 ($k = 0.04$).

$2^{\underline{a}}$ Iteração (1/2)

- Usando esse cálculo para calcular a função objetivo nas 5 matrizes de dimensões 5×3 e escolhendo k' para maximizar dado k e z, obtemos:

v_2

	-1/5	**0**	**1/5**
k = 0.04	-2.030	-1.710	-1.385
k = 0.08	-1.779	-1.454	-1.138
k = 0.12	-1.628	-1.309	-0.993
k = 0.16	-1.523	-1.208	-0.888
k = 0.20	-1.443	-1.128	-0.808

$g_2 = k'$

	-1/5	**0**	**1/5**
k = 0.04	0.04	0.08	0.08
k = 0.08	0.08	0.08	0.08
k = 0.12	0.08	0.08	0.12
k = 0.16	0.08	0.08	0.12
k = 0.20	0.08	0.12	0.12

Formulação Recursiva com Escolha de Trabalho

Problema Recursivo com Escolha de Trabalho (1/3)

- Agora, não necessariamente teremos a quantidade de trabalho $n = 1$, logo

$$F(k,n) = k^{\alpha} n^{1-\alpha} \quad \text{e} \quad U(c,\ell) = U(c, 1-n)$$

em que $\ell = 1 - n$ é a quantidade de lazer, que gera utilidade para o consumidor.

- Considere sempre que $z = 0$ (sem incerteza), então, para solucionar o problema:

$$v(k) = \max_{\substack{0 \leq k' \leq e^z F(k,n) + (1-\delta)k \\ 0 \leq n \leq 1}} \left\{ U\left[e^z F(k,n) + (1-\delta)k - k', \ell\right] + \beta v\left(k'\right) \right\}$$

- Considere que a função utilidade é dada por

$$U(c,\ell) = \ln c - \frac{n^{1+\varphi}}{1+\varphi} = \ln c - \frac{(1-\ell)^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \qquad \text{com } \varphi > 0$$

Problema Recursivo com Escolha de Trabalho (2/3)

- Suponha $n \in \mathcal{N} = \{1/4,\ 2/4,\ 3/4,\ 1\}$
- Assim como no caso com incerteza, calcularemos a função objetivo em 5 matrizes, correspondendo aos 5 possível valores de k, de dimensões 5×4 (combinações dos 5 possíveis k' com os 4 possíveis n).

Para k = 0.04

	1/4	**2/4**	**3/4**	**1**
0.04	-3.323	-2.888	-2.867	-3.077
0.08	-3.807	-3.118	-3.027	-3.202
0.12	-4.781	-3.418	-3.216	-3.344
0.16	$-\infty$	-3.849	-3.451	-3.511
0.20	$-\infty$	-4.621	-3.758	-3.711

(...)

- Diferente do caso com incerteza, escolhemos ambos k' e n, então, escolhemos o maior elemento em cada matriz inteira (e não um em cada coluna).

Problema Recursivo com Escolha de Trabalho (3/3)

$k=0.04$	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-3.323	-2.888	-2.867	-3.077
0.08	-3.807	-3.118	-3.027	-3.202
0.12	-4.781	-3.418	-3.216	-3.344
0.16	$-\infty$	-3.849	-3.451	-3.511
0.20	$-\infty$	-4.621	-3.758	-3.711

$k=0.08$	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-3.046	-2.642	-2.632	-2.847
0.08	-3.389	-2.818	-2.756	-2.945
0.12	-3.916	-3.031	-2.897	-3.053
0.16	-5.101	-3.047	-2.861	-2.996
0.20	$-\infty$	-3.674	-3.259	-3.314

$k=0.12$	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-2.891	-2.502	-2.497	-2.715
0.08	-3.178	-2.653	-2.604	-2.8
0.12	-3.581	-2.831	-2.725	-2.893
0.16	-4.267	-3.047	-2.861	-2.996
0.20	-8.495	-3.323	-3.02	-3.111

$k=0.16$	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-2.785	-2.404	-2.402	-2.622
0.08	-3.038	-2.54	-2.499	-2.699
0.12	-3.378	-2.697	-2.607	-2.783
0.16	-3.898	-2.884	-2.728	-2.874
0.20	-5.043	-3.113	-2.865	-2.975

$k=0.20$	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-2.703	-2.329	-2.329	-2.55
0.08	-2.935	-2.455	-2.419	-2.622
0.12	-3.236	-2.598	-2.518	-2.699
0.16	-3.669	-2.765	-2.628	-2.783
0.20	-4.449	-2.966	-2.752	-2.875

	v_1
0.04	-2.867
0.08	-2.632
0.12	-2.497
0.16	-2.402
0.20	-2.329

	$g_{k,1}(k)$
0.04	0.04
0.08	0.04
0.12	0.04
0.16	0.04
0.20	0.04

	$g_{n,1}(k)$
0.04	3/4
0.08	3/4
0.12	3/4
0.16	3/4
0.20	2/4

Formulação Recursiva com Incerteza e Escolha de Trabalho

Problema Recursivo com Incerteza e Escolha de Trabalho (1/2)

$k = 0.04$

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = 1$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$k = 0.08$

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = 1$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$k = 0.12$

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = 1$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$k = 0.16$

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = 1$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$k = 0.20$

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = 1$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

$z = -1/5$

	1/4	2/4	3/4	1
0.04	-	-	-	-
0.08	-	-	-	-
0.12	-	-	-	-
0.16	-	-	-	-
0.20	-	-	-	-

Problema Recursivo com Incerteza e Escolha de Trabalho (2/2)

- Em cada matriz calculada a partir de um dupla (k, z), seleciono o elemento de maior valor na matriz inteira, o que nos dá uma dupla (k', n).

v_1	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-	-	-
0.08	-	-	-
0.12	-	-	-
0.16	-	-	-
0.20	-	-	-

$g_{k,1}(k)$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-	-	-
0.08	-	-	-
0.12	-	-	-
0.16	-	-	-
0.20	-	-	-

$g_{n,1}(k)$	$-1/5$	0	$1/5$
0.04	-	-	-
0.08	-	-	-
0.12	-	-	-
0.16	-	-	-
0.20	-	-	-