3 Lista 3

3.0 [⊠] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Definição (Stokey et al., 1989, pág. 45). Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial S de uma norma $\|\cdot\| : S \to \mathbb{R}$, tal que $\forall x, y \in S$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $\|x\| \geq 0$, com igualdade se e somente se $x = y$;

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$; e

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Definição (Stokey et al., 1989, pág. 46a). Uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em S converge para $x \in S$, se para cada $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Definição (Stokey et al., 1989, pág. 46b). Uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em S é uma sequência de Cauchy (satisfaz critério de Cauchy) se para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N_\varepsilon.$$

Definição (Stokey et al., 1989, pág. 47). Um espaço métrico (S, ρ) é completo se toda sequência de Cauchy em S converge para um elemento em S.

Teorema 3.1 (Stokey et al., 1989). Seja $X \subseteq \mathbb{R}^l$ e seja $C(X)$ o conjunto de funções contínuas e limitadas em X, $f : X \to \mathbb{R}$, com a norma do sup $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|$. Então $C(X)$ é um espaço vetorial normado completo (espaço de Banach).

Teorema 3.2 (Teorema da Contração) (Stokey et al., 1989). Se (S, ρ) é um espaço métrico completo e $T : S \to S$ é uma contração de módulo β, então

(a) T tem exatamente um ponto fixo v em S, e

(b) Para todo $v \in S$,
$$\rho(T^n v_0, v) \leq \beta^n \rho(v_0, v), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Teorema 3.3 (Condições Suficientes de Blackwell para Contração) (Stokey et al., 1989). Seja $X \subseteq \mathbb{R}^l$ e seja $B(X)$ o espaço de funções contínuas e limitadas em X, $f : X \to \mathbb{R}$, com a norma do sup $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|$. O operador $T : B(X) \to B(X)$ é uma contração de módulo β se satisfaz:

(a) [monotonicidade] $f, g \in B(X)$, então

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in X \implies (Tf)(x) \geq (Tg)(x), \forall x \in X$$

(b) [desconto] Existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$[T(f+a)](x) \leq (Tf)(x) + \beta a, \qquad \forall f \in B(X),\ a \geq 0,\ x \in X.$$

Definição (Stokey et al., 1989, pág. 56a). Uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é hemi-contínua superior (hcs) em $x \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}$ com $x_n \to x$ e para toda sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$, existe uma subsequência convergente de $\{y_n\}_n$ tal que seu limite é $y \in \Gamma(x)$.

Definição (Stokey et al., 1989, pág. 56b). Uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é hemi-contínua inferior (hci) em $x \in X$ se, para todo $y \in \Gamma(x)$ e toda sequência $\{x_n\}$ com $x_n \to x$, existe $N \geq 1$ e uma sequência $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ tal que $y_n \to y$ e $y_n \in \Gamma(x_n)$, para todo $n \geq N$. [Se $\Gamma(x')$ é não-vazio para todo $x' \in X$, então é sempre possível toma $N = 1$.]

Definição (Stokey et al., 1989, pág. 57). Uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é contínua em $x \in X$ se é hcs e hci em x.

Teorema 3.6 (Teorema do Máximo) (Stokey et al., 1989). Seja $X \subset \mathbb{R}^l$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua, e seja $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ uma correspondência contínua e compacta. Defina:

$$h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x,y) \qquad \text{e} \qquad G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x,y) = h(x)\}$$

Então,

(a) $h : X \to \mathbb{R}$ é contínua

(b) $G : X \rightrightarrows Y$ é não-vazia, compacta e hcs.

Hipótese 4.1. $\Gamma(x)$ é não vazio para cada $x \in X$.

Hipótese 4.2. Para todo $x_0 \in X$ e todo $\underline{x} \in \Pi(x_0)$, existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}).$$

Condições suficientes para satisfazer Hipóteses 1 e 2 :

- F é limitada (acima ou abaixo)
- $\beta \in (0,1)$.

Teorema 4.2 (Stokey et al., 1989). Sejam X, Γ, F e β tais que Hipótese 4.1 e Hipótese 4.2 sejam válidas. Então, a função v^* satisfaz (FE).

Teorema 4.3 (Stokey et al., 1989). Sejam X, Γ, F e β tais que Hipótese 4.1 e Hipótese 4.2 sejam válidas. Se v é uma solução para (FE) e satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = 0, \qquad \forall (x_0, x_1, ..., x_n) \in \Pi(x_0),\ \forall x_0 \in X,$$

então, $v = v^*$, o supremo de (SP).

3.1 [⊠]

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $S = C(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas em X com a norma do sup: $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Mostre que $(S, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Estratégia da Prova:

- Espaço normado e completo $\Longrightarrow$ Espaço de Banach (Teorema 3.1 (Stokey et al., 1989))
- Exercício 3.4d de Stokey et al. (1989)
- Exemplo 33 de Krueger (2017) e Prova do Teorema 3.1 de Stokey et al. (1989).

Usando o Teorema 3.1 (Stokey et al., 1989), mostraremos que $(S, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, dividiremos a prova em 2 partes: demonstrando primeiro que o espaço é normado e, depois, que é completo:

Espaço $(S, \|\cdot\|)$ é normado:

Usando a Definição (Stokey et al., 1989, pág. 45), o espaço $(S, \|\cdot\|)$ é normado se satisfaz:

(a) $\|x\| \geq 0$, com igualdade se e somente se $x = y$

Note que $S = C(X)$ o espaço das funções reais contínuas e limitadas definidas em X. Note que, para todo $t \in X$, $|x(t)| \geq 0$. Então,

$$\sup_{t \in X} |x(t)| \geq 0$$

e, se $x(t) = 0$, para todo $t \in X$, então

$$\sup_{t \in X} |x(t)| = 0.$$

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sup_{t \in X} |\alpha x(t)| \\ &= \sup_{t \in X} |\alpha||x(t)| \\ &= |\alpha| \sup_{t \in X} |x(t)| \\ &= |\alpha|. \|x\| . \end{aligned}$$

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sup_{t \in X} |x(t) + y(t)| \\ &\leq \sup_{t \in X} (|x(t)| + |y(t)|) \\ &\leq \sup_{t \in X} |x(t)| + \sup_{t \in X} |y(t)| \\ &= \|x\| + \|y\| . \end{aligned}$$

Espaço $(S, \|\cdot\|)$ **é completo**:

Pela Definição (Stokey et al., 1989, pág. 47), temos que um espaço métrico (S, ρ) é completo se toda sequência de Cauchy em S converge para um elemento em S. Tome $\{f_n\}$ sequência de Cauchy em $C(X)$. Portanto, precisamos mostrar que existe $f \in C(X)$ tal que

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} (\|f_n - f\| < \varepsilon).$$

[Passo 1] Encontrar um candidato para f:

Tome $x \in X$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Considere $f_n, f_m \in C(X)$ tal que a sequência de número reais $\{f_n(x)\}$ satisfaça

$$|f_n(x) - f_m(x)| \overset{(a)}{\leq} \sup_{y \in X} |f_n(y) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\| \tag{3.1.1}$$

em que (a) se dá, pois norma de valor absoluto $\leq$ norma do supremo. Note que f_n é uma função no espaço $C(X)$, e $f_n(x)$ é um valor em $\mathbb{R}$ (mapeado pela função f_n no ponto x).

Como $\{f_n\}$ é de Cauchy em $C(X)$, então $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$. De fato, pela Definição (Stokey et al., 1989, pág. 46b), como $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon$$

e, como $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$, por (3.1.1), então

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon$$

ou seja, $f_n(x)$ satisfaz critério de Cauchy.

Como $f_n(x)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e o espaço $\mathbb{R}$ é completo, então sabemos que $f_n(x) \to f(x)$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}$. Então, defina $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

[Passo 2] Estabelecer que $\{f_n\}$ converge para f na norma do sup:

Para mostrar que $\|f_n - f\| \to 0$ quando $n \to \infty$, tome $\varepsilon > 0$ e escolha $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon/2$, $\forall m, n \geq N_\varepsilon$. Tome $x \in X$ e $m \geq n \geq N_\varepsilon$. Note que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| && \text{(desig. triangular)} \\ &\leq \|f_n - f_m\| + |f_m(x) - f(x)| && \text{(usando (3.1.1))} \\ &\leq \varepsilon/2 + |f_m(x) - f(x)|. && (3.1.2) \end{aligned}$$

Como $\{f_m(x)\}$ converge para $f(x)$, podemos escolher m para cada $x \in X$ tomado tal que $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Portanto, a partir de (3.1.2), temos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad \forall n \geq N_\varepsilon \tag{3.1.3}$$

Portanto, $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\| \leq \varepsilon$ e, logo, $\{f_n\} \to f$.

[Passo 3] Mostrar que $f \in C(X)$ é limitada e contínua:

Primeiro, vamos provar que f é limitada. Tome $n \in \mathbb{N}$. Note que, como $\{f_n\}$ está em $C(X)$, todos f_n são limitados, ou seja, existe uma sequência de números $\{M_n\}$ tal que $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M_n$.

Seja $M_n \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in X$. Assim, $\|f_n\| = \sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M_n$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sup_{x\in X} |f(x)| \\
&= \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \\
&\leq \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x\in X} |f_n(x)| && \text{(desig. triangular)} \\
&= \|f_n - f\| + \sup_{x\in X} |f_n(x)| \\
&\leq \|f_n - f\| + M_n && (\text{pois } \sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M_n) \\
&\leq \varepsilon + M_n. && \text{(por 3.1.3)}
\end{aligned}$$

em que a penúltima desigualdade vale para $\forall n \geq N_\varepsilon$. Portanto, f é limitada.

Agora, mostraremos que f é contínua em $x \in X$, ou seja,

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{y\in X} (\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon).$$

Tome:

- $\varepsilon > 0$
- $n \geq N_\varepsilon$ grande o bastante para que $\|f_n - f\| < \varepsilon/3$ (isto é possível, pois $f_n \to f$).
- $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$ (sabemos que f_n é contínua)

Segue que:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| && \text{(desig. triangular)} \\
&\leq \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + \sup_{y\in X} |f_n(y) - f(y)| && \text{((a))} \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, como queríamos demonstrar. ■

3.2 [☒]

Considere a equação funcional associada ao problema do planejador do modelo de crescimento neoclássico

$$v(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} [U(f(k) - k') + \beta v(k')],$$

em que $\beta \in (0,1)$, U e f são funções contínuas, estritamente crescentes e limitadas. Mostre que o operador $T : C(X) \to C(X)$ dado por

$$Tv(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} [U(f(k) - k') + \beta v(k')]$$

é uma β-contração.

Estratégia da Prova:

- Demonstrações em Stokey et al. (1989) nas páginas 54 e 55, e também no Krueger (2017) nas páginas 101 e 102, usando o Teorema 3.3 (Condições Suficientes de Blackwell para Contração) (Stokey et al., 1989).

Defina o espaço métrico $(C(X), \|\cdot\|)$ como espaço de funções limitadas definidas em X. Queremos mostrar que o operador dado é uma β-contração. Para isto usaremos o Teorema 3.3 (Condições Suficientes de Blackwell para Contração) (Stokey et al., 1989) para verificar se suas hipóteses são satisfeitas.

Primeiro, note que é dado que T mapeia $C(X)$ em si mesmo, ou seja, $T : C(X) \to C(X)$. Krueger (2017, pág. 101) diz que este passo que é frequentemente esquecido de verificação e, caso isso não tivesse sido suposto, precisaria ser provado.

Agora, verificaremos as condições suficientes de Blackwell:

(a) Monotonicidade:

Sejam v e w as funções pertencentes a $C(X)$. Tome $k, k' \in X$ tal que $v(k) \leq w(k), \forall k$. Seja $g_v(k) \in X$ uma política ótima da função v. Então, precisamos mostrar que $Tv(k) \leq Tw(k), \forall x \in X$:

$$\begin{aligned}
Tv(k) &= \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\} \\
&= U(f(k) - g_v(k)) + \beta v(g_v(k)) && \text{(aplicando } k' = g_v(k) \text{ que maximiza } Tv(k)) \\
&\leq U(f(k) - g_v(k)) + \beta w(g_v(k)) && (v(k) \leq w(k), \forall k \in X) \\
&\leq \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta w(k')\} && (g_v(k) \text{ pode ou não maximizar } Tw(k)) \\
&= Tw(k).
\end{aligned}$$

(b) Desconto:

Sejam $\beta \in (0,1)$, $a \geq 0$ e $x \in X$. Para que a hipótese de desconto seja válida, precisamos mostrar que $[T(f + a)](x) \leq (Tf)(x) + \beta a, \forall f \in C(X)$. Para o operador em questão, temos

$$\begin{aligned}
T(v + a)(k) &= \max_{0 \leq k' \leq f(k)} [U(f(k) - k') + \beta (v(k') + a)] \\
&= \max_{0 \leq k' \leq f(k)} [U(f(k) - k') + \beta v(k')] + \beta a \\
&= Tv(k) + \beta a.
\end{aligned}$$

■

3.3 [⊠]

Seja $C[a,b]$ o espaço das funções reais contínuas definidas em $[a,b]$, com a norma do máximo:

$$\|u\| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|, \qquad \forall u \in C[a,b].$$

Seja o operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$ tal que, $\forall u \in C[a,b]$,

$$T(u)(t) = \int_a^t u(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Mostre que, se $b - a < 1$, então T tem exatamente um único ponto fixo em $(C[a,b], \|\cdot\|)$. Dica: Mostre que $T : C[a,b] \to C[a,b]$. Você pode fazer isso tomando uma sequência $t^n \to t$ e mostrar que $T(u)(t^n) \to T(u)(t)$. Depois, basta mostrar que T satisfaz as condições de Blackwell para uma contração.

Usaremos Teorema 3.2 (Teorema da Contração) (Stokey et al., 1989), o operador T tem um único ponto fixo em $(C[a,b], \|\cdot\|)$. Primeiro, mostraremos que $T : C[a,b] \to C[a,b]$. Tome a sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to t$, com $t, t_n \in [a,b]$. Precisamos mostrar que $Tu(t_n) \to Tu(t)$.

Se $t_n < t$:

$$Tu(t_n) = \int_a^{t_n} u(s)ds = \int_a^t u(s)ds - \int_{t_n}^t u(s)ds$$

Se $t_n > t$:

$$Tu(t_n) = \int_a^{t_n} u(s)ds = \int_a^t u(s)ds + \int_t^{t_n} u(s)ds = \int_a^t u(s)ds - \int_{t_n}^t u(s)ds$$

Note que, nos dois casos, a expressão é a mesma e, quando $t_n \to t$, a segunda integral tende a zero (pois $\int_t^t u(s)ds = 0$) e, portanto:

$$Tu(t_n) \to \int_a^t u(s)ds = Tu(t).$$

Como o intervalo $[a,b]$ é fechado e limitado, as normas do máximo e do sup são equivalentes em $C[a,b]$. Agora, podemos verificar as condições de Blackwell para uma contração.

(a) Monotonicidade:

Sejam u e w as funções pertencentes a $C[a,b]$. Tome $x \in X$ tal que $u(x) \leq v(x), \forall x$. Então, precisamos mostrar que $Tu(k) \leq Tv(k), \forall x \in X$:

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \int_a^t u(s)ds \\ &\leq \int_a^t v(s)ds && \text{(pois } u(s) \leq v(s), \forall s) \\ &= Tv(k). \end{aligned}$$

(b) Desconto:

Sejam $\beta \in (0,1)$ e $c \geq 0$ e $x \in X$. Para que a hipótese de desconto seja válida, precisamos mostrar que $[T(u+c)](x) \leq (Tu)(x) + \beta c, \forall u \in C(X)$. Para o operador em questão, temos:

$$
\begin{aligned}
T(u+c)(t) &= \int_a^t (u(s)+c)ds \\
&= \int_a^t u(s)ds + \int_a^t cds \\
&= \int_a^t u(s)ds + (t-a)c \\
&\leq \int_a^t u(s)ds + (b-a)c && \text{(pois } t \leq b\text{)} \\
&= Tu(t) + (b-a)c. && (3.3.1)
\end{aligned}
$$

Para satisfazer a propriedade condição de desconto do Teorema de Blackwell, é necessário que, em (3.3.1), a constante c esteja multiplicada por um valor $\beta \in (0,1)$, logo precisamos que $(b-a) < 1$.

Portanto, pelo Teorema 3.2 (Teorema da Contração) (Stokey et al., 1989), como $(C[a,b], \|\cdot\|)$ é um espaço métrico completo e $T : C[a,b] \to C[a,b]$ é uma β-contração, então o operador T tem exatamente um ponto fixo em $(C[a,b], \|\cdot\|)$.

Logo, T é uma β-contração e, usando Teorema 3.2 (Teorema da Contração) (Stokey et al., 1989), o operador T tem um único ponto fixo em $(C[a,b], \|\cdot\|)$. ■

3.4 [☒]

Considere o seguinte problema sequencial

$$
\begin{aligned}
v^*(k) \equiv & \max_{c_t, k_{t+1}, k_{1,t}, k_{2,t}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
s.a. \quad & 0 \leq c_t \leq f_1(k_{1,t}), \qquad 0 \leq k_{t+1} \leq f_2(k_{2,t}), \qquad \forall t = 0, 1, \ldots \\
& k_{1,t} + k_{2,t} \leq k_t, \qquad \forall t = 0, 1, \ldots \\
& k_0 > 0 \text{ dado,}
\end{aligned}
$$

onde f_1 e f_2 são funções contínuas, estritamente crescentes e tais que $f_1(0) = f_2(0) = 0$ e $u(\cdot)$ é contínua e limitada em $\mathbb{R}_+$.

(a) Monte a equação de Bellman associada a este problema.

A partir do problema sequencial, chegaremos no problema recursivo:

$$
\begin{aligned}
v^*(k) &\equiv \max_{c_t, k_{t+1}, k_{1,t}, k_{2,t}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
&= \max_{c_t, k_{t+1}, k_{1,t}, k_{2,t}} \left\{ u(c_0) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta^t}{\beta} u(c_t) \right\} \qquad \text{(tirando } t = 0 \text{ do } \textstyle\sum) \\
&= \max_{c_0, k_1, k_{1,t_0}, k_{2,t_0}} \left\{ u(c_0) + \beta \left[\max_{c_t, k_{t+1}, k_{1,t}, k_{2,t}} \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \right\} \right] \right\} \\
&= \max_{c_0, k_1, k_{1,t_0}, k_{2,t_0}} \left\{ u(c_0) + \beta \left[\max_{c_{t+1}, k_{t+2}, k_{1,t+1}, k_{2,t+1}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{t+1}) \right\} \right] \right\} \\
&= \max_{c_0, k_1, k_{1,t_0}, k_{2,t_0}} \{ u(c_0) + \beta v^*(k_{t+1}) \}
\end{aligned}
$$

Logo, podemos reescrever a equação de Bellman como

$$
v(k) = \max_{c, k', k_1, k_2} \{ u(c) + \beta v(k') \}, \qquad \text{s.a. } (c, k') \in \Gamma(k)
$$

em que, pelas restrições supostas no problema, temos

$$
\Gamma(k) = \left\{ (c, k') \in \mathbb{R}^2_+ \; ; \; 0 \leq c \leq f_1(k_1), \; 0 \leq k' \leq f_2(k_2), \; k_1 + k_2 \leq k \right\}.
$$

Note que $c, k' \in \mathbb{R}^+$, pois são limitados inferiormente por 0, e limitados superiormente, respectivamente, por $f_1(k_1)$ e $f_2(k_2)$, e que f_1 e f_2 são funções estritamente crescentes em k_1 e k_2 com $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Disto, segue que $k_1, k_2 \geq 0$ e, portanto, $0 \leq k_1 + k_2 \leq k$. Assim, podemos supor que o domínio de $\Gamma(k)$ é $\mathbb{R}_+$ e, por mapear o par (c, k'), podemos descrever a correspondência como $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2_+$. ■

(b) Mostre que o operador de Bellman associado a este problema possui um único ponto fixo. Você pode assumir que a correspondência

$$
\Gamma(k) = \left\{ (c, k') \in \mathbb{R}^2_+ \; ; \; 0 \leq c_t \leq f_1(k_1), \; 0 \leq k' \leq f_2(k_2), \; k_1 + k_2 \leq k \right\}
$$

satisfaz as condições do teorema do máximo.

Estratégia da Prova:

T tem único ponto fixo: Teorema 3.2 (Teorema da Contração) (Stokey et al., 1989)

- $(C(\mathbb{R}_+), \|\cdot\|)$ é um espaço métrico completo: Teorema 3.1 (Stokey et al., 1989)
  - $C(\mathbb{R}_+)$ é conjunto de funções contínuas e limitadas com norma do sup
- T é uma β-contração: Teorema 3.3 (Condições Suficientes de Blackwell para Contração) (Stokey et al., 1989)
  - $T : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$: operador T mapeia $C(\mathbb{R}_+)$ de funções em si mesmo
    - Tv é limitada
    - Tv é contínua: Teorema 3.6 (Teorema do Máximo) (Stokey et al., 1989)
      - (suposto) $f(c, k') \equiv u(c) + \beta v(k')$ é contínua
      - (suposto) Γ é correspondência contínua (hcs e hci)
      - (suposto) Γ é compacta (limitada e fechada).
      - Para demonstração desses passos supostos ver aqui.
  - T satisfaz monotonicidade
  - T satisfaz desconto

Mostraremos que o operador de Bellman associado a este problema possui um único ponto fixo, logo, usando o Teorema 3.2 (Teorema da Contração) (Stokey et al., 1989), precisamos mostrar que $(C(\mathbb{R}_+), \|\cdot\|)$ é um espaço métrico completo e o operador $T : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$ é uma β-contração.

(1) T é uma β-contração:

Mostraremos que $T : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$, e T satisfaz monotonicidade e desconto.

(1a) $T : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$:

Precisamos mostrar que Tv é limitada e contínua. Como $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2_+$ satisfaz (por suposição) as condições do Teorema 3.6 (Teorema do Máximo) (Stokey et al., 1989), então Tv é contínua.

Note que v é uma função limitada, pois a função utilidade (retorno), u, é limitada. Logo, como o máximo de uma função limitada é limitada, temos que Tv é limitada. Portanto, $T : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$.

(1b) T satisfaz monotonicidade:

Sejam y e z as funções pertencentes a $C(\mathbb{R}_+)$. Tome $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $y(x) \leq z(x), \forall x$. Então, precisamos mostrar que $Ty(k) \leq Tz(k), \forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} Ty(x) &= \max\{c + \beta y(x)\} \\ &\leq \max\{c + \beta z(x)\} && \text{(pois } y(x) \leq z(x), \forall x) \\ &= Tz(x). \end{aligned}$$

(1c) T satisfaz desconto:

Sejam $\beta \in (0, 1)$ e $a \geq 0$ e $x \in X$. Para que a hipótese de desconto seja válida, precisamos mostrar que $[T(u + a)](x) \leq (Tu)(x) + \beta a, \forall u \in C(X)$. Para o operador em questão, temos:

$$
\begin{aligned}
T(u+a)(x) &= \max\{c+\beta[u(x)+a]\} \\
&= \max\{c+\beta u(x)+\beta a\} \\
&= \max\{c+\beta u(x)\}+\beta a \\
&= Tu(x)+\beta a.
\end{aligned}
$$

Logo, T é uma β-contração. Note que, como $C(\mathbb{R}_+)$ é um espaço de funções contínuas e limitadas na norma do sup, então $C(\mathbb{R}_+)$ é um espaço de Banach (normado e completo). Portanto, como $(C(\mathbb{R}_+), \|\cdot\|)$ é um espaço métrico completo e T é uma β-contração, usando Teorema 3.2 (Teorema da Contração) (Stokey et al., 1989), concluímos que T tem um único ponto fixo v em $C(\mathbb{R}_+)$. ■

(c) Argumente que se v é ponto fixo do operador de Bellman no espaço das funções contínuas e limitadas, então $v = v^*$.

Para mostrar que a solução v de (FE) é igual à solução v^* de (SP), utilizaremos o Teorema 4.3 (Stokey et al., 1989).

Primeiro, precisamos mostrar que $\mathbb{R}_+, \Gamma, v$ e β satisfazem a Hipótese 4.1 e a Hipótese 4.2. Para isto, é suficiente mostrar que v é limitada (acima ou abaixo) e $\beta \in (0,1)$. No item (b), já foi demonstrado que v é limitada e que T é uma β-contração com um $\beta \in (0,1)$. Logo, ambas hipóteses são válidas.

No item (b) já verificamos que v é solução de (FE), agora só resta provarmos provar que é válida a "condição de transversalidade da (FE)" (ver intuição em Krueger, 2017, págs. 108-109), dada por

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = 0, \qquad \forall (x_0, x_1, ..., x_n) \in \Pi(x_0),\ \forall x_0 \in X,$$

Quando $n \to \infty$, como $\beta \in (0,1)$, temos que $\beta^n \to 0$, mostrando que a expressão acima é válida. Portanto, concluímos que as soluções de (FE) e de (SP) são iguais, ou seja, $v = v*$. ■